

Universidad Autónoma Metropolitana
Maestría en Ingeniería y Ciencias Ambientales

Modelo matemático para evaluar la intensidad del agua en la
producción de la Industria del papel en la Cuenca del Valle de
México

Presenta:
Ing. Marina Pedro Aburto

Asesores:
Dra. Lilia Rodríguez Tapia
Dr. Jorge Armando Morales Novelo

Ciudad de México

noviembre, 2018

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por otorgarme la beca que me permitió realizar mis estudios de posgrado.

A la Universidad Autónoma Metropolitana por darme la oportunidad de crecer académicamente.

A mi directora de tesis la Dra. Lilia Rodríguez que me guio, orientó y me dedicó gran parte de su tiempo durante toda mi maestría.

A mi tutor el Dr. Jorge Armando Morales Novelo que enriqueció mi trabajo con sus sabios comentarios.

A mis padres por su apoyo incondicional.

Contenido

RESUMEN	6
INTRODUCCIÓN	8
OBJETIVOS	11
HIPÓTESIS	11
METODOLOGÍA	12
CAPÍTULO 1 : LA TECNOLOGÍA EN LA PRODUCCIÓN DE PAPEL	13
1.1 Historia de la producción de papel	14
1.1.1 La producción de papel en el Mundo	14
1.1.2 La producción de papel en México	19
1.2 Aspectos del actual proceso técnico de producción de papel	24
1.2.1 Insumos requeridos	24
1.2.2 Proceso de producción de papel	27
1.2.2.1 Etapa 1: Preparación de materias primas, descortezado y astillado	28
1.2.2.2 Etapa 2: Preparación de la pasta de celulosa	28
1.2.2.3 Tercer Etapa: Blanqueado de pasta de celulosa	31
1.2.2.4 Etapa 4: Formación de hojas de papel	32
1.3 Importancia del agua en el proceso de producción de papel	34
1.3.1 Recirculación de agua en la producción de papel	36
1.4 Estado del arte en la Innovación Tecnológica en la producción de papel en el mundo en el siglo XXI	40
CAPÍTULO 2 : DISEÑO DEL MODELO MATEMÁTICO DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN	43
2.1.1 Modelos de múltiples variables	43
2.1.2 Modelo lineal con dos variables $z = f(x_1, x_2)$	44
2.1.2.1 Representación de la variable z a través de curva de nivel	45
2.1.2.2 Propiedades de las rectas de nivel	49
2.1.2.3 Derivadas parciales	50
2.1.2.4 Incrementos porcentuales de z con respecto a cada variable (elasticidades)	54
2.1.2.5 Cambios sobre una misma curva de nivel	58
2.2 Modelo del proceso de producción no lineal	60
2.2.1 Modelos no lineales	60

2.2.1.1 Representación de la variable z a través de curva de nivel	60
2.2.1.2 Propiedades de la curva de nivel	63
2.2.1.3 Derivadas parciales	64
2.2.1.4 Elasticidad de z con respecto a las variables independientes	68
2.2.1.5 Cambios entre las variables x_1 y x_2 sobre la misma curva de nivel	70
2.3.1 Cobb Douglas sin factor de escala (A)	74
2.3.1.1 Características de la curva de nivel	77
2.3.1.2 Derivadas parciales	78
2.3.2.3 Influencia del valor de la variable fija x_1 en el incremento de z	82
2.3.1.4 Elasticidad de z con respecto a cada una de las variables independientes	84
2.3.1.5 Cambios entre variables x_1 y x_2 sobre la misma curva de nivel	87
2.3.2 Modelo no lineal Cobb Douglas incluyendo factor de escala (A)	93
2.3.2.1 Desplazamiento de curvas de nivel	94
2.3.2.2 Interpretación del valor de A	95
2.3.2.3 Propiedad monótonica (propiedades lineales)	96
2.3.2.4 Derivadas parciales	97
2.3.2.5 Elasticidad de Z respecto a las variables x_1 y x_2	97
2.3.2.6 Cambios entre variables x_1 y x_2 sobre la misma curva de nivel	99

CAPÍTULO 3 : MODELO MATEMÁTICO DE LA INDUSTRIA DEL PAPEL EN LA CUENCA DEL VALLE DE MÉXICO (CVM) 103

Características del Modelo Cobb Douglas 108

Estimación del modelo matemático de la función de producción de papel en la Cuenca del Valle de México 110

Datos de la producción de papel	110
---------------------------------	-----

Estimación del modelo 114

Resultados obtenidos 114

Análisis de resultados 116

Análisis de resultados modelo 2008	116
Factor de escala A.	116
Elasticidad de los factores	117
Capacidad de Sustitución entre factores de la producción.	117
Tasa marginal de sustitución (RTS)	117
Producción marginal decreciente de los factores.	119
El nivel de los factores fijos afecta la productividad marginal del factor agua	120
Análisis de resultados modelo 2013	123
Factor de escala A	123
Elasticidad de los factores	123
Capacidad de Sustitución entre factores de la producción.	124
Valor marginal decreciente de los factores.	127

El nivel fijo de los factores afecta la productividad marginal del factor agua	128
Comparación entre las tecnologías del año 2008 y 2013 en la industria de papel en la CVM	130
Factor de escala A	131
Elasticidad de los factores	132
Capacidad de Sustitución entre factores de la producción.	134
Producción marginal decreciente para ambos periodos	135
CONCLUSIONES GENERALES	138
LISTA DE FIGURAS	144
LISTA DE CUADROS	145
LISTA DE GRÁFICAS	146
REFERENCIAS CITADAS	151
REFERENCIAS COMPLEMENTARIAS	153

Resumen

En este trabajo se analiza el uso del agua en la Industria de papel ubicada en la Cuenca del Valle de México (CVM), actividad caracterizada por ser intensiva en el uso del agua. Este tema es importante dado que esta industria representa el 14% de la industria de todo el país, y la CVM se caracteriza por registrar el mayor estrés hídrico del país.

Además de la introducción, el documento se conforma de 3 capítulos. En el primer capítulo, La Tecnología en la Producción de Papel, incluye 3 secciones, la sección 1.1 describe la **historia de la producción de papel** y en ella se describen los inventos (maquinaria) y los materiales que han sido utilizados para el proceso de producción de papel. Primero se muestra el desarrollo en el mundo y luego el caso de México. La sección 1.2 **Proceso Técnico de producción del papel**, describe el método de producción de papel, dividido en etapas: preparación de materias primas, preparación de pasta de celulosa, blanqueado de pasta y formación de hojas de papel. Cada etapa señala los insumos utilizados clasificados en cuatro grupos denominados factores de la producción, materias primas (M), trabajadores (L), capital (K) y agua (W). En la última sección denominada **uso del agua** se presenta el proceso de recirculación de agua con algunos ejemplos de los ahorros logrados gracias a la implementación del sistema de recirculación. Finalmente, se señala el estado del arte en las tecnologías en la industria de papel, en temas de ahorro de materiales, de energía y equilibrio ecológico.

En el segundo capítulo denominado **Diseño del modelo matemático del proceso de producción de papel** se analizan funciones matemáticas lineales y no lineales de múltiples variables, con el objetivo de seleccionar la función adecuada para modelar el proceso de producción de la industria de papel. Se seleccionaron ejemplos específicos de cada tipo de función y se analizaron sus propiedades matemáticas. En cada uno de los ejemplos se destacan los conceptos: curva de nivel y su propiedad monotónica, su derivadas parciales o *valor marginal de la variable dependiente con respecto a cada una de las variables independientes* (VM), los incrementos porcentuales de z con respecto a cada variable (elasticidades α_s), su relación técnica de sustitución (RTS) y su tasa técnica de sustitución. Y para el caso de la función Cobb Douglas se presenta al factor de escala (A).

El modelo seleccionado fue el modelo no lineal Cobb Douglas con factor de escala que presenta las siguientes características: tiene la propiedad de ser monotónica, por lo que el valor de la producción Q se incrementa en la misma proporción en que cambian sus variables independientes. Los exponentes (α_s) denominados elasticidades miden como se incrementa porcentualmente la producción ante un aumento del uno por ciento en cada una de sus respectivas variables, la suma de las α s es igual a la unidad ($\alpha_M + \alpha_L + \alpha_K + \alpha_W = 1$) lo que permite un crecimiento lineal de la producción. La constante "A" representa un factor de escala que potencia el valor de la función Q .

En el capítulo 3, se estima el modelo Cobb Douglas a través del método econométrico denominado mínimos cuadrados ordinarios de múltiples variables, para dos diferentes periodos (2008 y 2013) siendo la base de información los censos económicos del INEGI (2009 y 2014). La comparación de ambos modelos permite evaluar el desarrollo tecnológico que ha tenido la industria de papel en dicho periodo.

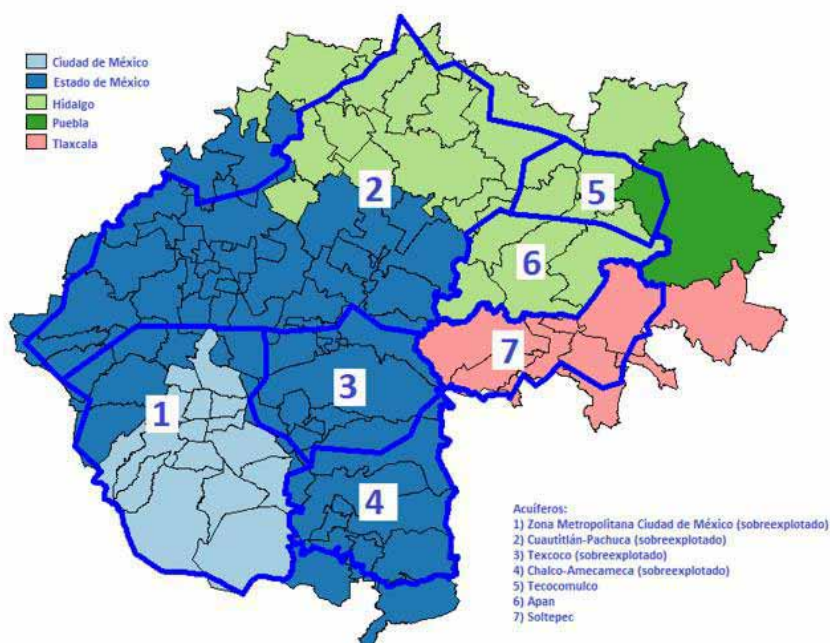
El resultado de la investigación registra una reducción en la elasticidad entre la producción y el agua en los modelos estimados del 2008 al 2013, lo que se explica por el desarrollo tecnológico y prácticas consideradas eficientes en el consumo del agua. En este periodo la capacidad productiva de la industria en la CVM se incrementó en 3 veces explicado por los diferentes avances en la tecnología, por ejemplo, el uso de software permite una mayor precisión de las participaciones utilizadas de cada insumo, el desarrollo de equipo multitareas permite que se pueda realizar de manera simultánea la formación de hojas y la recuperación de materiales.

Introducción

El sostenido crecimiento económico y poblacional han generado altas demandas sobre los recursos hídricos de la Cuenca del Valle de México (CVM), la cual está ubicada dentro de la región hidrológica No. 26, Alto Panuco, y colinda al norte del río Tula. Tiene una superficie total de 9,674 km², comprende en su totalidad a la Ciudad de México, algunos municipios de los Estados de Hidalgo, México, Tlaxcala y Puebla (Días Trenado, 2005).

La CVM está formada por siete acuíferos: 1) Zona Metropolitana de la Ciudad de México (sobreeplotado), 2) Cuautitlán–Pachuca (sobreeplotado), 3) Texcoco (sobreeplotado), 4) Chalco-Amecameca (sobreeplotado), 5) Tecocomulco, 6) Apan y 7) Soltepec de los cuáles cuatro se extraen más recursos hídricos de lo que se recargan de forma natural (figura 1). La extracción total de agua de los acuíferos de la CVM es de 1,865 hm³/ año con respecto a su recarga de 1,261 hm³/año (Organismo de Cuenca Aguas del Valle de México, 2013).

Figura 1 : Cuenca del Valle de México



(Revollo Fernández, 2017)

Los procesos industriales utilizan parte de estos recursos hídricos. Un proceso industrial se refiere al conjunto de actividades o serie de trabajos físicos o químicos que provoca un cambio físico o químico en la materia prima, con la generalidad de generar productos de valor comercial.

Todo proceso industrial se caracteriza por el uso de insumos y suministros. Un insumo es el agua utilizada para diversos propósitos (C. Gibbons, *The economy of water*, 1987). Algunas de las actividades en procesos que tienen un elevado consumo de agua son: procesos de manufactura, producción de bebidas y producción papel.

El uso del agua en los procesos productivos varía dependiendo del tipo de industria. (Hanemann, 1998). La industria de papel tiene un alto consumo de agua, en sus procesos de transporte de materia prima, lavado de materia prima y blanqueado, el consumo de agua varía entre 7.5 y 37.8 m³/ tonelada de papel producido (Moelle Chavéz *et al*, 2002) aunque P.K Tewari reporta un consumo de hasta 90.1 m³/Ton de papel. La variación en el consumo de agua en la Industria de papel está directamente relacionada con su porcentaje de recirculación en el proceso de producción, así como de la tecnología utilizada (C. Gibbons, *The economy of water*, 1987).

La industria de papel y cartón es una industria intensiva en el uso del agua. Ésta industria tiene gran presencia en la CVM y representa el 14% de la industria de papel a nivel nacional. En el 2013 había 604 unidades económicas, dedicadas a la industria de papel en la CVM, de los 604 totales se ubicaron 64 grandes establecimientos (DENUE, 2017) que poseen derechos de extracción de agua (de acuerdo con el artículo 22 de la Ley General de Aguas Nacionales este derecho depende de la disponibilidad de agua, los derechos son inscritos en el Registro Público de Derechos de Agua) (Conagua, 2017), su principal actividad es la producción de papel blanco y se caracterizan por ser empresas grandes.

En la figura 2 se representan con puntos verdes a los 64 establecimientos que son los más importantes de la industria de papel en la CVM y se aprecia que se localizan en los acuíferos de la Zona Metropolitana de la Ciudad de México, Cuautitlán–Pachuca y Chalco-Amecameca, dichos acuíferos se caracterizan por estar sobreexplotados.

Figura 1.1 :Empresas productoras de papel presentes en la CVM



Marina Pedro Aburto a partir del Directorio Estadístico Nacional de Unidades Económicas (DENUE)

Los Censos Económicos 2009 y 2014 (que corresponden a los años 2008 y 2013), fueron la principal fuente de información, de éstos se obtuvo información de cuantos metros cúbicos de agua se utilizaron el cada periodo en la producción papel, entre otras variables. Con los datos del Censo Económico se elaboraron dos modelos matemáticos (2008 y 20013). Cada modelo matemático se basó en la función de producción Cobb- Douglas. Los modelos estimados relacionan los insumos requeridos para la producción de papel y el grado de sustitución de recursos utilizados en el proceso. Además, donde se relacionaron los volúmenes de agua utilizados en la producción de papel, con la producción total de papel. Finalmente, los modelos fueron comparados entre sí y se contrastaron los resultados con los datos de otros modelos reportados por informes internacionales que describen a la producción de papel y su consumo de agua.

El incremento de la producción de papel demanda de mayores volúmenes de extracción de los acuíferos causando afectaciones tales como: agotamiento del acuífero, daños a la geología del suelo, hundimientos y daños al bienestar de la población al competir el uso industrial con el uso público urbano (entre otros daños por determinar). En el proceso de producción se utilizan grandes cantidades de agua. No existen estudios sobre los impactos de extracción de la Industria de papel.

Objetivos

Objetivo General

Elaborar un modelo matemático que capte el proceso de producción de la industria de papel, y permita medir la intensidad en el uso del agua.

Objetivos específicos

Objetivo 1:

Conocer el proceso tecnológico que permite la producción del papel, su evolución y el estado del arte en dicha tecnología e interesa destacar lo que se refiere a México. Identificar la importancia que tienen la materia prima, trabajo y maquinaria en el cambio tecnológico del proceso de producción de papel, destacando el papel del agua en el proceso.

Objetivo 2: Describir las propiedades matemáticas de funciones que permiten captar aspectos tecnológicos del proceso de producción de papel. Comparar sus propiedades y elegir la función adecuada para simular el proceso productivo de la industria de papel. Especificar dentro del modelo la participación del agua.

Objetivo 3: Estimar y analizar el modelo matemático que simula el proceso de producción de la industria de papel en la CVM.

Objetivo 4. A través de la interpretación de los parámetros del modelo estimado, identificar aspectos tecnológicos de la capacidad productiva y de sustitución del agua, el ahorro de agua debido a implementar sistemas de recirculación y la relación entre nuevos materiales y consumo de agua en el proceso de producción papel.

Objetivo 5. Identificar si la industria de papel en la CVM ha evolucionado para ser menos intensiva en el uso del agua en el periodo 2008 a 2013.

Hipótesis

La industria de papel en la CVM ha reducido su intensidad en el uso del agua en el periodo 2008 a 2013 al enfrentar un estrés hídrico elevado.

Metodología

La metodología que se aplica consiste en diseñar y estimar un Modelo matemático para la producción de la Industria del papel en la Cuenca del Valle de México. El modelo se estima en dos momentos en el tiempo lo que permite comparar las propiedades de la tecnología aplicada en el sector.

Etapla 1: Revisión de estado del arte

- Información referente a la industria del papel

Se recolectó información sobre el proceso de producción de papel, resaltando el consumo de agua dentro del proceso, así como las diferencias en el consumo de agua debido a desarrollo tecnológico y grado de recirculación. Utilizando información de censos económicos del INEGI, se investigó la producción de papel y ganancias de la Industria del papel en la CVM.

- Consulta de unidades económicas en la CVM
- Consulta de censos económico
- Análisis de consumo de agua en diferentes regiones en el mundo.

En la etapa 2: Elaboración del modelo

- Análisis de características de modelos lineales y no lineales
- Análisis de propiedades matemáticas del modelo no lineal Cobb -Douglas

En la etapa 3: Estimación del modelo

- Estimación del modelo no lineal Cobb -Douglas
- Análisis de elasticidades y otros parámetros

En la etapa 4: Análisis de resultados

- Relación de características tecnológicas y propiedades matemáticas.

Capítulo 1 : La tecnología en la producción de papel

Introducción

En este capítulo se describe en forma breve la evolución tecnológica en la producción de papel. En el apartado 1.1 se describen **antecedentes** respecto a la producción del papel, se realiza una breve descripción del papel desde su invención en China, el surgimiento de los primeros molinos utilizados para la producción del papel, la invención de la imprenta y la producción de la primera máquina de papel. Esto es, se describen diferentes formas en la de producción del papel, así como el uso que se le ha dado a este producto con el paso del tiempo.

Además, en el apartado 1.1 denominado **Historia de la producción de papel**, se describe como se fue desarrollando la producción de papel en México, destacando que antes, la materia prima para la fabricación de la pulpa fueron los restos de ropa, los cuáles dejaron de utilizarse a partir y de la invención de la pila holandesa. Gracias a este instrumento se empezó a utilizar la madera para producir pasta de celulosa. Otro aspecto que destacar en el proceso de producción es el que siempre se ha utilizado agua sin importar si en la elaboración de pasta se utilizan trapos o madera.

En el apartado 1.2 denominado **Proceso Técnico de producción del papel**, se describen los insumos que son necesarios para la producción del papel, clasificados en cuatro grupos que son: materias primas, trabajo, capital y agua. Además de la descripción de los insumos, también se ilustran las cuatro etapas del proceso de producción de papel: preparación de materias primas, preparación de pasta o pulpa, blanqueado de la pulpa y formación de hojas.

En el apartado 1.3 denominado **Uso del agua**, se representa el uso del agua en las diferentes etapas del proceso de producción, así como la tecnología utilizada para la recirculación del agua en el proceso de producción de papel. Se muestran ejemplos de reducción de agua en diferentes países, gracias a la implementación de este sistema y un panorama general del uso del agua en la industria del papel en México y en el Mundo.

Finalmente se menciona el estado del arte en las tecnologías en la industria de papel, en temas de ahorro de materiales, de energía y equilibrio ecológico mencionándose algunos esfuerzos que han buscado el reemplazo del agua por nuevos químicos que son utilizados como disolventes. En temas de ahorro de agua describo el concepto “mejores tecnologías disponibles” (BAT por sus siglas en inglés, Best Available Technology).

Al final se realiza una breve síntesis del capítulo.

1.1 Historia de la producción de papel

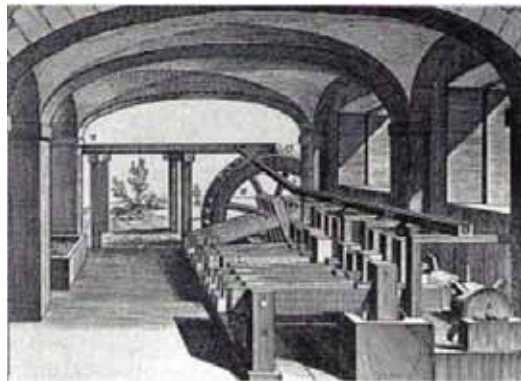
1.1.1 La producción de papel en el Mundo

En el año 105 d.c. el emperador Ho-Ti ordenó al ministro chino Caí Lun (Tasa Lun) buscar un soporte para la escritura, como resultado fue inventado el papel y comenzó su fabricación. La composición y método de fabricación del papel sólo era conocida por los artesanos chinos, hasta el año 751 cuando sucedió la batalla de Samarcanda, durante la que gran parte de artesanos papeleros chinos fueron apresados por soldados musulmanes y fueron obligados a revelar el método y los ingredientes de la producción de papel.

Después de este acontecimiento la **receta del papel** fue conocida y difundida en el Oriente medio, en África del norte y en Europa. En el caso de Europa España fue el primer país de Europa en conocer la receta y su primer molino papelerero fue establecido en Játiva, región de la que artesanos papeleros emigraron hacia otros países de Europa.

Una vez divulgada la **receta del papel**, se inició la construcción de molinos de papel, se construyeron molinos de papel que tenían el mismo principio que los molinos utilizados para fabricar harina (Ver figuras 1.1). En Italia, los molinos de papel se situaron en Fabriano y en Palermo (Sicilia) entre 1268 y 1276. En Francia, el primer molino se construyó en Troyes hacia 1338; en Alemania, en Mayence en 1320; en Bélgica, en el río Lys de Houplines (actualmente Lille), en 1389; y en el siglo XIV, podemos encontrar diversas menciones en Bruselas, en los Países Bajos, en Suiza y en Inglaterra (Gómez Hernández, S. G. ,2010).

Figura 1.1: Molino de papel



Fuente: <http://www.asociacionbuxa.com/2009/07/fabrica-de-papel-de-larano/>

El siguiente instrumento que destacar en la historia de la producción de papel es la imprenta, inventada por Johannes Gutenberg en 1450 que permitió imprimir cientos de copias de una misma página provocando un gran aumento de la demanda de papel. El principio de la imprenta es el siguiente: Gutenberg descubrió cómo hacer grandes cantidades de tipos móviles de un metal resistente fijándolos de tal manera que estuvieran lo suficientemente firmes para imprimir, y lo suficientemente flexibles para poder ser reutilizados en una impresión completamente distinta (Lenz, 1990). Éste invento se ilustra en la figura 1.2.

Figura 1.2: Imagen de la imprenta



Fuente: <http://criticahistorica.com/cuando-se-invento-la-imprenta/>

La fabricación de papel por mucho tiempo fue a base de la trituración de trapos. Para desfibrar los trapos, los molinos utilizados estaban formados por dos grandes piedras que rodaban dando vueltas sobre una pileta, en la que vertían los trapos mezclados con agua. Las piedras pisaban y desmenuzaban los trapos hasta convertirlos en pulpa o pasta, el proceso era lento y complicado hasta que, en el año 1670, **la máquina refinadora de cilindro o pila holandesa**, fue utilizada en la descomposición de las fibras de tela, permitiendo acelerar y mejorar la elaboración de la pasta.

La máquina refinadora de cilindro estaba formada básicamente por una tina de madera de encina forrada de plomo, dividida en dos compartimentos, muy similar al corte de una manzana, (figura 1.3) los compartimientos estaban divididos por una pared de madera, en uno de los compartimientos giraba un cilindro con aproximadamente 28 cuchillas. El fondo de la tina bajo el cilindro era curvo y también disponía de cuchillas fijas en él.

Figura 1.3:Pila o tina holandesa



Fuente: <https://www.gipuzkoa.eus/es/web/aintzinako-lanbideak/pila-holandesa>

La tina se llenaba de agua y trapos cortados en pequeños trozos (figura 1.4), al girar el cilindro de la máquina, ambos grupos de cuchillas (las del cilindro y las del fondo de la tina) prácticamente se tocaba y el movimiento de ambas arrastraba los trapos hacia las cuchillas, éstas los desmenuzaban y deshilachaban, después de varias horas de trabajo, los trapos quedaban reducidos a pasta o pulpa.

Figura 1.4: Trapos utilizados para la fabricación de papel

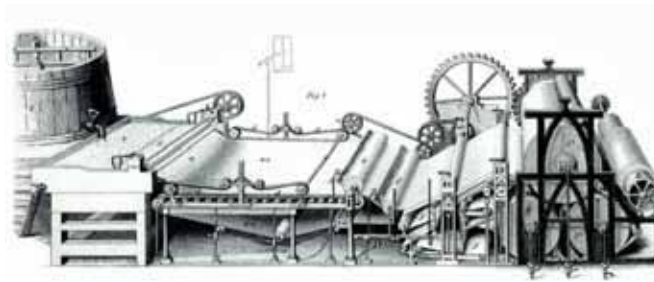


Fuente: <http://codicologia.atspace.cc/contenidos/02Formas-Materiales/02-08-Papel.html>

Después del invento de la pila holandesa ya contaba una forma eficiente de producir la pasta de celulosa la siguiente etapa del proceso de producción de papel a mejorar fue la producción de las hojas de papel. Dicho avance fue logrado gracias que en 1799 Nicholas Louis Robert creó la primera máquina de papel en Francia. La máquina de papel no ser perfeccionarla ni completarla por Robert. El desarrollo de la máquina sucedió en Inglaterra por el equipo de trabajo formado por los hermanos Fourdrinier, la fábrica de máquinas Hall de Dartford y el ingeniero inglés Bryan Donkin.

La máquina de papel formaba las hojas de papel conocidas en la actualidad. Para lograr este resultado, el primer paso en la maquina Fourdrinier era diluir con agua la pulpa de celulosa, para lograr la dilución el agua, se vertía en una malla metálica, realizando un movimiento horizontal (derecha- izquierda) que provocaba que las fibras contenidas en la pulpa se intercalaran entre sí. Una vez que la pulpa en la malla metálica, el agua presente en la pulpa era retirada por varios procedimientos (p.e gravedad, vacío, presión y secado). Una vez que se le retiraba el agua, la mezcla era transportada a cilindros calientes y secos para formar la hoja de papel. Finalmente se lograba obtener una enorme hoja de papel, que se enrollaba para formar una bobina.

Figura 1.5: Máquina de papel



Fuente: <http://elpapejusilpa.blogspot.com/>

Durante el siglo XIX, se modificaron los métodos e ingredientes utilizados para la fabricación de papel. En 1844 Friedrich Gottlob Keller, quien había ingresado a la industria desde su juventud trabajó en el desarrollo de una máquina que permitió la extracción de fibras de los árboles y como resultado obtuvo la pasta elaborada a partir de madera, la cual comenzó a ser utilizada como ingrediente principal en la fabricación de papel a partir de 1952. Como resultado del cambio del proceso de fabricación se logró aumentar la resistencia mecánica aumenta, sin embargo, el cambio provoco que el papel se degradará más rápidamente.

En los años siguientes a la creación de la pasta desarrollada, las siguientes modificaciones aplicadas al proceso tenían como propósito lograr una reducción en el costo de fabricación del papel, se perfeccionó el proceso de producción, destacando el esfuerzo de países como Estados Unidos y Canadá, que hoy en día son los principales productores de papel a nivel mundial. En Europa también existe gran cantidad de países que se han dedicado al desarrollo del proceso de producción.

Durante el siglo XX el proceso de producción de papel mejoró, se descubrieron nuevas maneras de incluir mayor diversidad de materias primas, se pueden mencionar: nuevas especies vegetales accesibles, desechos forestales o materiales reciclados, y métodos químicos. También hubo desarrollo de máquinas más eficientes, cogeneración y procesos de recuperación energética y de reactivos que se consideran más sostenibles y respetuosos con el medio ambiente. Además, surgió una competencia entre Estados Unidos y Europa para mejorar la calidad del papel, y se desarrollaron productos químicos que serán descritos cronológicamente en el cuadro 1.1:

Cuadro 1.1: Evolución de productos químicos utilizados en la producción de papel

Año	Producto
1912	Millsaugh L. en Reino Unido produce el secado por succión.
Desde 1945 hasta la fecha	Aumentó el uso de pastas químicas
1946	Se utiliza por primera vez de forma comercial el dióxido de cloro para blanquear pastas. Comienzo de la utilización de blanqueadores.
1949	Frieske Hoefner introduce el calibrador de rayos beta, un instrumento para medir el gramaje en la máquina de fabricación de papel.
1966	Por primera vez una máquina de fabricación de papel es controlada por computadora.
1975 - 1976	Se dispone de pasta termomecánica.
1989	Se abrió una planta piloto cerca de Leningrado, URSS. Esta planta no agregaba azufre ni cloro para blanquear la pasta. Se combinaban peróxido de hidrógeno y oxígeno alcali.

Fuente: CNCR Centro Nacional y Restauración. Curso de conservación de Papel en Archivos, Historia y tecnología de los materiales 30 de septiembre – 15 de noviembre 1966, Santiago de Chile.

En el siglo XXI, en la mayoría de los países con producción de papel, sólo los grandes grupos empresariales son capaces de llevar a cabo inversiones para renovar sus plantas. Se produjeron constantes **innovaciones tecnológicas** entre las que se pueden destacar principalmente:

- Flexibilidad en el proceso de fabricación de papel y cartón, mejoras en el uso de informática, telecomunicaciones, uso de software y programación electrónica para controlar las etapas del proceso de producción de papel.
- Aparición de maquinaria que facilita las tareas y permiten aumentar la productividad, la calidad de cada producto y la velocidad de producción.
- Se realiza el proceso de blanqueado de pasta libre de cloro gracias a: las continuas innovaciones, a los requerimientos medioambientales e incorporación de la Biotecnología. Siendo esta última aplicada tanto al tratamiento biológico del efluente (aguas residuales del proceso de producción de papel) como a la utilización de las bioenzimas de blanqueo de la pasta. Se han utilizado enzimas de organismos silvestres, así como de microorganismos manipulados genéticamente para la generación de xilanasas, las cuáles

son enzimas que resisten altas temperaturas y que sirven para eliminar xilanos (compuestos de hemicelulosas indeseables en el proceso de producción de papel). (Estrada, 2010).

- Mayor reciclaje de papel. Existe cada vez mayor número de empresas que, como materia prima de su proceso productivo, utilizan pasta procedente de papel reciclado.
- Mejora de la eficiencia energética. Existe una tendencia al aumento de la práctica de la cogeración y utilización de la biomasa.
- El último aspecto que destaca en el siglo XX es que surgieron nuevos métodos de producción de **pasta mecánica de madera, morena y química**.

Los avances en ahorro y sustitución de agua en el proceso de producción de papel están en constante desarrollo y se mencionarán al final del capítulo.

1.1.2 La producción de papel en México

En la historia de la producción de papel en México se destaca el uso de diversos materiales para escribir por parte de nuestros antepasados, limitaciones de materiales, restricciones de la colonia, llegada de la imprenta, molinos clandestinos, esfuerzos de regulación ambiental.

Los historiadores distinguen tres clases de papel en la historia del papel en México. El **papel de metl** (maguey), **papel de amatl** (higuera) y **papel de izotl** (palma). Las fibras del amatl fueron las que principalmente se utilizaron en la manufactura de los papeles, mientras que las del maguey se emplearon en menos producción, se ignora porque los antiguos mexicanos preferían el amatl al metl.

Las antiguas civilizaciones de México que producían y utilizaban el papel en ceremonias, ya fuera religiosas o rituales, fueron los aztecas y los mayas. Los mayas lo llamaron “huun, los aztecas producían el papel conocido como “amatl”. Este último se comenzó a usar entre los toltecas y los teotihuacanos.

El papel era usado en la elaboración de códices mayas y aztecas en papel de fibra vegetal, para escribir la historia de los héroes y dioses (la presentación de los manuscritos era en rollos y en forma plegadiza. Los pegadizos eran como biombos, reforzándolos con dos tablas en cada una de las caras, de modo que para los conquistadores españoles tenían la apariencia de libros europeos), para dibujar los adornos de los ropajes de los dioses y en estandartes en las ceremonias mortuorias de reyes en México

Este desarrollo logrado por las antiguas civilizaciones se vio frenado, debido después la de la conquista de México y fundación de la Nueva España, la producción de papel quedó prohibida y se estancó durante trecientos años. La corona española, sólo permitía la molienda de granos como el trigo, los destartados obreros de burdas telas de tela y los batanes. Las actividades relacionadas con la transformación de productos naturales y el establecimiento de talleres también fueron prohibidas.

La producción de papel fue retomada a principios del siglo XVI, gracias a la tarea de evangelización de los misioneros lo cual implicaba el consumo de papel y producción de papel, producto requerido para tener material impreso que permitiera difundir el conocimiento de la doctrina cristiana, entre los años 1538 y 1539. Para la impresión de libros fue necesario la primera imprenta fue asistida por el obispo de México Fray Juan de Zumárraga y por los impresores: Antonio de Espinosa y Pedro Ocharte. (Vázquez Hernández, 2010). Adicionalmente a los impresores anteriores, sólo algunas imprentas tenían acceso al papel.

La producción de papel continuaba restringida y, por lo tanto, el uso de molinos para la producción de papel estaba prohibida. Los molinos que existieron eran clandestinos primer ejemplo a destacar es el molino de Culhuacán, situado al sur de la ciudad de México, cerca del actual cerro de la Estrella. El molino logró desarrollarse gracias a su cercanía con los lagos Chalco y Tezcuco. Este molino el 22 de octubre de 1550 fue autorizado para moler pan, sin embargo, con el paso del tiempo dentro del mismo se comenzó a producir papel y se descubrió la forma de utilizar madera para la producción de pasta. Por lo que este molino logró convertirse en una fábrica de papel. Otros ejemplos fueron el molino de papel en Magdalena Contreras (1618), el molino de Miraflores en San Ángel (1640) y el molino de Loreto.

Gracias a la lucha por la Independencia, se reconoció la importancia de la letra impresa para difundir los principios de la libertad y surgieron los primeros periódicos y libros impresos. Después de independencia comenzó a emerger la maquinaria nueva, lo que revolucionó los métodos de producción, el cambio en la producción incluía a la Industria de papel y se comenzó a reconocer que la producción de papel era una actividad necesaria.

El aumento de talleres de impresión ocasionó un aumento en la demanda de papel, sin embargo, la cantidad de papel suministrado por España era insuficiente y la producción en México aún era incipiente (Vázquez Hernández, 2010). Para enfrentar el problema de la alta demanda de papel el 4 de agosto de 1798, se firmó un decreto ordenando la economía en el uso del papel; para el 29 de marzo de 1805 aún no se había cumplido con esta disposición y se tuvo que hacer frente a la crisis del papel, reduciendo el tamaño de la correspondencia de oficio a media cuartilla, la crisis fue tan grave que se recurrió al robo de papeles y documentos de los archivo, de las oficinas y de bibliotecas, para poder realizar otra actividad como la envoltura de alimentos.

Para la producción de papel se requería de trapos, los cuáles comenzaron a escasear, limitando la producción de papel. Como consecuencia de la escasez de materia prima, los molinos de papel tuvieron problemas para satisfacer la demanda, la cual aumento durante esta época. El problema de la escasez de materia prima se resolvió hasta que el 26 de septiembre de 1843, el gobierno mexicano decretó la libre importación de lino en pedacería.

En los años siguientes a la consumación de la independencia, algunos molinos que originalmente se dedicaban a la producción de pan, se transformaron en los primeros molinos destinados a la producción de papel. Un importante ejemplo fue el molino Miraflores que dio lugar a la fábrica de papel Loreto. Otros molinos que se pueden mencionar son el molino de trigo de Chimalhuacán, Belén y Cocolapan.

Durante el periodo de 1914 a 1916 se suspendió la producción de papel debido a esta pausa en la producción provocada por la antigüedad y mal estado de la maquinaria, ya que sólo estaban en condiciones de elaborar cartoncillo gris y papel de estraza. Al terminar la pausa algunas fábricas de

papel que tuvieron gran importancia fueron: San Rafael y Anexas, la fábrica San José, la Pochteca Papel (Grupo Pochteca S.A de C.V), la fábrica de papel Coyoacán, empaques de Cartón Titán, compañía papelera el Félix, Cartonera Estrella, cartonera Chihuahua, Aten quique, Papel Iruña S.A, Aurora S.A, Compañía Industrias papelera, Rubén Barrera, Fabricas de papeles Faciales y Sanitarios de México S.A (Lenz, 1990). De las cuales pocas siguen en la actualidad, algunas dejaron de elaborar por la escasez de trapo, y otras por el lugar donde se encontraban establecidas, como la asociación de **Peña Pobre y Loreto** esta sociedad fue importante puesto que aquí se hicieron varios desarrollos de tecnologías que serán descritos brevemente

Caso de molino Loreto

Una vez que comenzó el desarrollo de la Industria de papel en México, alrededor de 1824, José Manuel Zazoya y Bermúdez administró la fábrica de papel ubicada en el antiguo molino de Loreto. Los materiales más utilizados para la producción de la pasta fueron las fibras de la penca del maguey y los trapos. En 1900, Albert Woern compró y fundó la fábrica de papel **Peña Pobre**, con una máquina tipo Fourdrinier, las materias primas principales fueron el trapo y celulosa de madera y en 1906 se añadió otra máquina de segunda mano. En abril de 1924, la cédula operativa fue transmitida a la sociedad Fábrica de Papel de Peña, S.A y debido a esta sucesión en 1928 surgió la sociedad de **Papel Loreto y Peña Pobre, S.A.**

Durante la segunda guerra mundial, hubo una restricción al uso de celulosa por lo que se construyó una planta para la elaboración de **celulosa al sulfato**, que emplearía madera de pino ubicada en terrenos cercanos a la fábrica de Papel Peña Pobre. Ésta entró en operación en 1942 siendo la primera planta de celulosa de México y América Latina (Vazquéz Hernández, 2010).

La fábrica se localizaba entre edificios, los cuales la acusaron de ser la causante del 15% de la contaminación ambiental, por lo que, en 1948, como respuesta a la problemática después de complicados y extensos estudios realizados en la planta de Peña Pobre, se lograron desarrollar cuatro procesos o sistemas que ayudaron a reducir la contaminación:

La implementación de sistemas de recuperación de gases producidos en digestores y evaporadores (desde 1959 patentado en 18 países), la oxidación del sulfuro de sodio (a partir de 1964 también patentado en 12 países) que evitó que los licores de sodio desprendan ácido sulfhídrico al ser evaporados por contacto directo, el uso de químicos poco contaminantes en el cocimiento de la celulosa (desde 1965 patentado en 12 países).

Se desarrollaron de sistemas y equipos necesarios para la regeneración de los licores, principalmente el hidróxido y el sulfuro de sodio, a fin de emplearlos como reactivos en los cocimientos (a partir de 1966 fue patentado en 20 países). Finalmente, para disminuir la emanación de humos, partículas en suspensión de éstos, y para recuperar parte del sulfato de sodio empleado en el proceso se instaló un precipitador electrostático puesto en marcha en 1973, eliminando las emisiones de humo en la chimenea.

Sin embargo, a **pesar de haber sido precursora mundial de aquellos procesos tecnológicos** la fábrica de Papel **“Loreto y Peña Pobre, S.A”** fue cerrada en 1992.

Proceso de producción de papel en México desde la Colonia hasta la Revolución

El proceso de fabricación de papel ha sufrido grandes cambios a través de la historia, en el caso de la Nueva España el proceso utilizado fue el siguiente:

El primer paso del proceso iniciaba con la labor del trapero quien realizaba la recolección de restos de ropa (andrajos), y los entregaba al molino de papel. Después las obreras del molino seleccionaban las telas recolectadas según sus calidades. Por ejemplo, para la fabricación de papeles destinados a escrituras, dibujos y tabacos, se preferían las ropas limpias fabricadas con lino, cáñamo y algodón de primera calidad.

Una vez seleccionadas las ropas en el molino, las obreras sacudían el material sobre un enrejado en la mesa de trabajo y eliminaban botones, cuerpos extraños y costuras. Las ropas se cortaban en trozos con el uso una especie de guadaña, y los trozos de tela se colocaban en canastos o en cajones, manteniendo la separación de las calidades de las telas.

A continuación, se pudría los pedazos de trapo (aunque sólo se pretendía una fermentación), en unos estanques a los que se les denominó **cubas**. Estando el trapo fermentado, se le llevaba a las pilas papeleras, las cuales formaban parte del batán. El batán o pisón (figura 1.6) que era una máquina ideada para abatanar las telas, es decir, para golpearlas con lo que obtenía la pulpa para fabricar el papel.

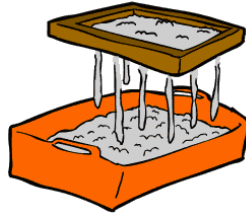
Figura 1.6: Imagen de batán



Fuente: <https://sanfernandodehenaresnews.blogspot.com/2017/08/el-molino-de-papel-del-real-sitio-de.html>

A continuación, seguía la formación de hojas realizada de forma manual por un obrero denominado **formador**, el sumergía oblicuamente un molde en la tina para llenarlo de pasta, a lo ancho y a lo largo, a fin de facilitar el desagüe del líquido excedente y a la vez, uniformar la distribución de la pasta sobre el molde (Vazquéz Hernández, 2010). La pasta se dejaba escurrir y a continuación otro trabajador conocido como **ponedor**, traspasaba un sayal (lo que equivale a la malla de la máquina de papel, figura 1.7) para formar las hojas de papel.

Figura 1.7: Sayal



Fuente: <https://encuentrodeideas.wordpress.com/2011/12/07/como-hacer-papel-reciclado/>

A continuación, otra persona conocida como **separador**, desprendía las hojas de los sayales y las colocaba una sobre otra, hasta formar una especie de paca de 261 hojas, que ponían después en la prensa seca.

Las pacas se llevaban a secar al **mirador** que contaba con ventanas con persiana móviles que regulaban la ventilación y la uniformidad del secado. Cerca del había cuerdas donde las hojas se detenían, separadas entre sí y a una altura conveniente. Una vez secas las hojas se descolgaban y se pasaban a encolar (enrollar), a fin de acondicionarlo para recibir las tintas de escritura e impresiones (Vazquéz Hernández, 2010). Finalmente, el papel seco pasaba a la sala denominada **contador**, en la cual se escogían, contaban y empaquetaban las hojas de papel.

1.2 Aspectos del actual proceso técnico de producción de papel

El proceso técnico de producción consiste en transformar insumos en un producto nuevo, mediante un proceso de transformación que se denomina producción. En lo que sigue se explican los insumos requeridos en el proceso de producción de papel, y el proceso de transformación.

1.2.1 Insumos requeridos

Cuando se analiza un proceso productivo, los ingredientes o insumos de la producción se pueden clasificar en tantos grupos como se considere conveniente según el análisis que se realice. En ingeniería industrial es común clasificarlos en costos fijos y variables (Gabriel Leandro, 2002) y en economía en 3 grupos, trabajadores (L), capital (K) y tierra (T) (Varian H., 1996). Sin embargo, se pueden incluir otras categorías como materias primas (M), y el agua (W) por ser de interés en el análisis como es el caso del presente trabajo.

Para analizar el proceso de producción de papel los insumos se clasifican en cuatro grupos, los cuáles se describen a continuación.

Materias primas (M)

Las principales materias primas son **la madera y los químicos**. Estos insumos se utilizan en el proceso de producción de la pasta o pulpa de celulosa, así como en el tratamiento y blanqueo de esta. También son importantes para dar características específicas (p.e. color) a las hojas de papel.

La **madera** es la principal materia prima en la formación de la pasta o pulpa. Para que madera pueda ser transformada esta se corta en astillas y se separa en sus componentes principales que son: los carbohidratos, la lignina, las resinas y esencias.

Los carbohidratos están compuestos por la celulosa y la hemicelulosa. La celulosa es el componente de interés en la producción de papel. La lignina que es un compuesto químico que une las fibras de la madera, es amorfo y de color oscuro. La presencia de lignina en el papel produce envejecimiento y hace que se vuelva amarillo con gran rapidez. Por esta razón en la producción de papeles “blancos”, la lignina debe ser retirada en su totalidad. Finalmente, las resinas y esencias se encuentran en la madera en una proporción del 5 al 10 % y deben ser tratadas para evitar problemas de manchas sobre el papel (Barrieros García, 2009)

La madera debe ser modificada para lograr una masa blanda conocida como pasta de celulosa, que debe ser blanqueada y diluida para formar posteriormente formas las hojas de papel. **Los químicos** que permiten lograr este resultado son los pigmentos, aditivos, colorantes, microbicidas, y retentivos y floculantes.

Los pigmentos otorgan al papel características específicas, las más utilizadas son el Caolín, Talco, Carbonato Cálcico, Sulfato Cálcico, Sulfato de Aluminio e Hidróxido Cálcico (Barrieros García , 2009); Los aditivos se añaden al papel para modificar sus características físicas, los más importantes son los productos de encolado que disminuyen la permeabilidad del agua. (Revilla, 2004); Los colorantes se añaden para conseguir un papel de un color determinado (Barrieros García , 2009). Los microbicidas destruyen determinados tipos de hongos y bacterias que se instalan en la formación del papel, los cuales pueden provocar roturas en el papel (Barrieros García , 2009). Finalmente, los retentivos y floculantes se añaden principalmente en la producción de embalaje para mejorar la firmeza y fuerza de estas.

Trabajo (L)

En el proceso productivo es fundamental la participación de trabajadores calificados para operar las máquinas y organizar el proceso de producción. Se pueden mencionar las siguientes actividades gerente de producción, gerente de mantenimiento y servicios, contabilidad, gerente de control ambiental y seguridad e higiene, operadores de materia prima, operadores de máquina y preparación de pasta, operadores de planta de tratamiento de aguas residuales, operadores de calderas, etc. (Promasa , 2007). Se observa en el sector una clara tendencia a reducir el número de trabajadores debido al desarrollo tecnológico en grandes, medianas y pequeñas empresas dedicadas a la producción de papel.

Capital (k)

El capital incluye la maquinaria y el equipo, así como el local, es decir todo lo que se considere como activo fijo. El proceso de producción ha evolucionado para lograr un proceso industrial masivo, basado en el uso de maquinaria y equipo que permite aumentar la productividad. Las máquinas básicas del proceso se listan a continuación:

El pulper y el disco refinador son utilizados en la elaboración de pulpa

Figura 1.8: Pulper



Fuente: <https://spanish.alibaba.com/p-detail/pulper-desintegrador-de-pasta-de-papel-hidro-desintegrador-tipo-D-300000708667.html>

Figura 1.9:Disco refinador



Fuente: <http://hyecoinnovations.com/4-11-double-disc-refiner/>

El filtro prensa de banda es utilizado en el secado de la pulpa antes de la formación de las hojas de papel

Figura 1.10. Filtro prensa de banda



Fuente: <http://xrd-equipment.com/1-7-belt-filter-press/>

La máquina de papel es utilizada en la formación de las hojas de papel

Figura 1.11 Máquina de papel



Fuente: <https://spanish.alibaba.com/product-detail/small-scale-fourdrinier-machine-for-paper-kraft-paper-making-machine-price-60340357853.html>

Agua (W)

El agua es un insumo muy importante que se utiliza en todas las etapas de producción del papel. Primero se utiliza para el lavado y transporte de la materia prima, como disolvente en el proceso de desfibrilación de los troncos, en los procesos termo-mecánicos (se utiliza en forma de vapor para ablandar las fibras de la madera), para diluir los químicos utilizados en la eliminación de lignina y en el blanqueado. Finalmente, en la formación de hojas, el agua actúa como un enlace entre las fibras.

1.2.2 Proceso de producción de papel

Como se señaló en el apartado previo, los insumos que intervienen en el proceso de producción se clasifican en cuatro grandes categorías denominados factores de la producción: materias primas (M), la mano de obra o trabajadores (L), el capital (K), donde se ubica la maquinaria y equipo utilizados para la producción actual de papel y el agua (W).

El proceso de producción del papel se puede concebir como la combinación de los factores de la producción, el tipo de combinación define la **tecnología de producción**.

En términos esquemáticos en lo que sigue se describirá el proceso típico de producción que adoptan las empresas para la manufactura de papel en el presente. En la figura 1.12 se presentan las cuatro etapas básicas que registra el proceso de producción de papel, que definen lo que se conoce como **tecnología de producción de papel**.



Adaptado de Amok, 1992

De acuerdo con la figura, la primera etapa consiste en la preparación de materias primas al realizar el lavado de la madera, descortezado de la misma y corte en astillas; la segunda etapa es la preparación de pasta de celulosa que a base de procesos mecánicos y químicos que permiten

obtener diferentes calidades de papel; en la tercera, la pulpa recibe un proceso de blanqueado; en la cuarta y última etapa, la pasta de celulosa debe ser diluida con el propósito de formar las hojas de papel.

1.2.2.1 Etapa 1: Preparación de materias primas, descortezado y astillado

En esta etapa el primer paso es cortar la madera en astillas para ser lavadas y eliminar cualquier resto de arena o polvo que pudiera desgastar o desgarrar la maquinaria. Una vez que se tiene la madera en forma de astillas, estas son introducidas en un dispositivo similar a una batidora llamada pulper, en donde se elabora la pasta de celulosa.

Existen dos diferentes plantas productoras de papel: las que fabrican su propia pasta de celulosa dentro de las instalaciones y las que compran la pasta y a partir de ella producen las hojas de papel. En el caso de las empresas que inician desde la preparación de la pasta, la preparación de materias primas es el primer paso de la producción; en el caso de las que elaboran a partir de pulpa, se inicia el proceso de producción del papel con la hidratación de la pulpa comprada.

1.2.2.2 Etapa 2: Preparación de la pasta de celulosa

La pasta de celulosa se prepara en un dispositivo llamado *pulper*, (figura 1.13) donde se mezcla el agua con las astillas y comienza el proceso de separación de fibras. Las fibras se separan por el impacto de éstas al caer, por el rozamiento de la hélice del pulper y finalmente por el rozamiento de las mismas fibras entre sí. El calor generado dentro del pulper ayuda a la dispersión de las fibras en la formación la pasta, siguiendo procedimientos físicos o químicos. Esta etapa o procedimiento también es conocido como digestión de madera y requiere del consumo de agua para mezclar los químicos y para triturar las astillas.

La pasta obtenida puede ser mecánica si sólo se utilizan procedimientos mecánicos en su elaboración o química, si sigue procedimientos químicos.

Figura 1.13: Preparación de pulpa en Pulper



Fuente: <http://www.samarthpapermachines.com/productrange2.html>

Pasta a partir de procedimientos mecánica (pasta mecánica)

La pasta mecánica se obtiene pasta mecánica cuando solo se muele la madera para separar las fibras, se convierte en pasta más del 90% de la madera utilizada y no se retira la lignina. La pasta mecánica se considera de alto rendimiento debido a que da como resultado papeles con alta resistencia mecánica.

Existen 3 procesos para elaborar pasta mecánica: el proceso estándar (producción de pulpa de madera molida), el proceso termo - mecánico (TMP por sus siglas en inglés) y el proceso termo – mecánico - químico (CTPM por sus siglas en inglés).

a. Proceso estándar (producción de pulpa de madera molida)

Las astillas de madera se muelen y se obtiene una pasta de fibras celulósicas con alto contenido de lignina. En el proceso no intervienen insumos químicos, y el rendimiento de este (es decir, el porcentaje de madera en la pasta es muy elevado).

El molido consiste en frotar la madera sobre unas muelas cilíndricas (actualmente se han sustituido las muelas por discos de metal giratorios), a la vez se le va agregando agua. El calor producido por el frotamiento hace que el agua se caliente, ablanda la lignina y facilita que la separación de fibras.

Se añade agua para facilitar el molido y refrigerar la muela recalentada por la intensa fricción de los troncos presionados contra ella. La pasta atraviesa unas finas cribas (coladeras), lo que permite sólo el paso de las fibras, depurándose además de todo material extraño, por ejemplo, arena o polvo.

b. Proceso termo-mecánico (PTM)

Las astillas se ablandan con vapor previo al proceso mecánico convencional. El objetivo es reducir el tratamiento mecánico que es aplicado a las fibras, a modo de disminuir el daño y mejorar la calidad de la pasta obtenida. Una vez que las astillas se calientan mediante vapor para ablandarlas, estas se introducen con agua a presión en un disco refinador que consta de dos discos de **contra - rotación**, ambos con canales radiales desde el centro hasta el borde exterior (figura 1.14).

Los canales mencionados van estrechándose conforme se aproximan al borde del disco. Las astillas introducidas gracias a la acción de los discos se separan en fibras individuales. Las fibras no desprendidas se recuperan en la etapa de cribado y se envían al refinador de desechos, para su posterior tratamiento (Svensk Cellulosa Aktreblaget (SCA)).

Figura 1.14: Disco refinador



Fuente: <http://hyecoinnovations.com/4-11-double-disc-refiner/>

La ventaja de este proceso es que se emplea casi toda la madera a excepción de la corteza, y la desventaja es que el papel producido con este método es de baja resistencia mecánica y de mala calidad al ser reciclado. Al no eliminarse toda la lignina en el proceso PTM, ésta produce que el papel adquiera un color amarillo al exponerse a la luz.

c. (Proceso termo-mecánico químico) (PTMQ)

En la producción de la pasta semi-química se utilizan determinados compuestos químicos (p.e lejía a base de sosa o de sulfito sódico) además del vapor de agua. Es una variante de las pastas químicas, con un menor ataque químico (lo que hace menos costoso el proceso), y un posterior tratamiento mecánico.

El producto obtenido es menos puro que en el caso de los procesos químicos, pero tienen alto rendimiento de madera. La pasta semi-química. Se utiliza como sustituta de la pasta química en productos que no requieran gran calidad como los papeles higiénicos, papel de revista, entre otros (Barrieros García , 2009).

La pasta formada siguiendo procedimientos químicos (pasta química)

La pasta química se produce disolviendo químicamente la lignina dispuesta entre las fibras de la madera, con lo cual se separan éstas sin dañarse de forma sustancial. El procedimiento implica la cocción de las astillas y los químicos en el pulper (Teschke & Demers). Este procedimiento se aplica cuando se producen papeles que requieren un mayor porcentaje de blancura.

Básicamente, hay dos métodos distintos de producir pulpa química: el método del bisulfito y el método del sulfato o Kraft, cuya aplicación depende de los requerimientos del producto final. Las sustancias químicas utilizadas son recicladas.

a. Proceso al bisulfito

La madera astillada se cuece en una mezcla de **dióxido de azufre** y una disolución de hidróxido sódico o cálcico con vapor de agua.

b. Kraft (sulfato)

Las astillas se introducen en el pulper. Se añaden productos químicos para disolver la lignina y liberar las fibras. El proceso se propicia aumentando la temperatura en el pulper de los 150°C a los 200°C. A continuación, la pasta se criba y se extraen las fibras que no se han separado, seguidamente se lavan para eliminar cualquier resto químico, arena o polvo (Barrieros García , 2009).

1.2.2.3 Tercer Etapa: Blanqueado de pasta de celulosa

Una vez que se ha preparado la pasta de celulosa, el siguiente proceso es el blanqueado. El objetivo es eliminar los restos de lignina, debido a que puede provocar en el papel un color amarillento, que sea débil y envejezca prematuramente (figura 1.15).

Figura 1.15: Pulpa antes y después de blanquear



Fuente: Svensk Cellulosa Aktreblaget

Los métodos de blanqueado más utilizados son los siguientes:

Con gas de cloro (también llamado cloro elemental): En la industria del papel, se utilizó durante décadas el cloro elemental en el blanqueo de la celulosa. Cuando los organismos internacionales encargados de controlar el impacto al medio ambiente encontraron que este método generaba altas cantidades de dioxinas y contaminaba las aguas de los ríos y lagos cercanos a estas industrias, se buscaron nuevas tecnologías de blanqueo y se comenzaron a definir las normativas y exigencias que se deberían comenzar a cumplir (López Sardi, E. M. ,2007).

Libre de cloro elemental que utiliza dióxido de cloro (ClO_2) u ozono (O_3).

La pasta “totalmente libre de cloro”. Las sustancias químicas utilizadas habitualmente para el blanqueo son las siguientes: Oxígeno (O_2), ozono (O_3) y peróxido de hidrógeno (H_2O_2) (López Sardi, E. M. (2007).

Al finalizar el proceso de blanqueado, la pulpa es lavada para eliminar el excedente de químicos utilizados, a la acción de lavado después del proceso de blanqueado se conoce “proceso de ducha”. Algunos papeles que reciben el proceso de blanqueado son los siguientes: **papel de Impresión y Escritura, papel Higiénico-Sanitario y papeles especiales.**

Algunos papeles que no requieren el proceso de blanqueado se elaboran con **pasta mecánica** mezclada con **otras fibras** provenientes de papel recuperado. Como son el **papel para envases y embalajes** clasificados en: **cartón gris, cartón ondulado y cartón compacto.**

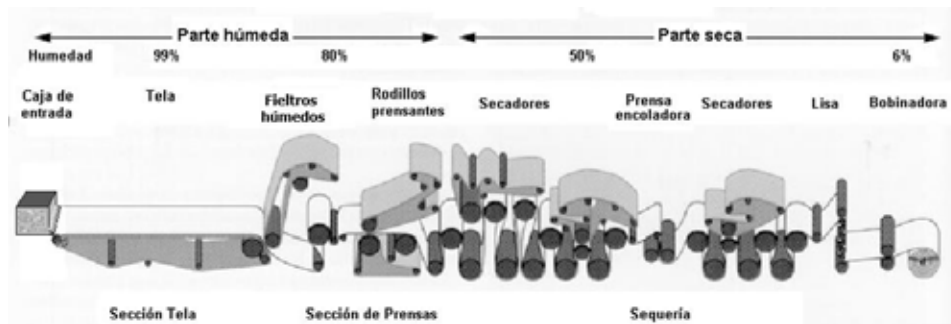
1.2.2.4 Etapa 4: Formación de hojas de papel

Una vez que se ha preparado la pasta de celulosa y se le han dado las propiedades necesarias, se da paso a la última etapa: **la formación de la hoja de papel** donde se utiliza la máquina de papel (figura 1.16).

La máquina de papel transforma la pasta de celulosa diluida, en la hoja de papel que es una lámina delgada, ancha y con todos los componentes perfectamente distribuidos (Revilla, 2004). En la máquina de ocurren tres procesos: prensado, secado y embobinado. Estos clasifican en **la fase húmeda y la fase seca.**

En la fase húmeda se encuentran el circuito de la cabeza de la máquina, la caja de entrada, la tela, los fieltros y las prensas. En la etapa seca se ubican los secadores de primer grupo, la prensa encoladora, los secadores de segundo grupo, la lisa y la bobinadora.

Figura 1.16: Máquina de papel



Fuente: Revilla, 2004

La producción del papel empieza introduciendo la mezcla de la pasta en la caja de entrada o cabecera que se sitúa antes de la **sección de la tela** también conocida como **malla**, y es la responsable de suministrar la pasta de celulosa para que esta adquiera una forma rectangular coincidente con el ancho de la máquina de papel (Revilla, 2004). En el proceso de dilución de pasta se utilizan regaderas que adiciona agua fresca o de ducha (agua libre de químicos), dicho proceso es conocido en la literatura como proceso de ducha.

Para la formación de la hoja, la pulpa concentrada se deposita sobre **la tela o malla**. A partir de este momento se ejerce de manera continua una diferencia de presión en la pulpa concentrada, una gran parte del agua que acompaña el chorro de entrada es eliminada por filtración y las fibras se orientan por si mismas en la dirección del rápido movimiento de la bobina de papel.

Desde la malla o tela, la pasta todavía húmeda pasa a la sección de prensado, donde se seca aún más mediante presión entre cilindros y fieltros húmedos. **Los fieltros húmedos** conducen a la hoja a través de las prensas. Las funciones de los fieltros son: soportar y conducir la hoja, absorber agua, amortiguar el contacto de la hoja con prensas y dar una superficie de contacto lisa. (Revilla, 2004).

A continuación, sigue **el proceso de secado**, en esta operación se termina de eliminar el agua de la hoja de papel hasta alcanzar una humedad definitiva situada entre 5 y 7% (Da Silva Campos , 2009). Esta operación se realiza poniendo en contacto la hoja de papel húmeda con la superficie exterior de los cilindros de fundición (secadores o secaderos) que están calentados interiormente con vapor.

En la fase final, para mejorar el contacto de la hoja de papel con la superficie caliente de los cilindros, se usan telas secadoras en algunos casos. Una vez seco, las fibras se han unido convirtiéndose finalmente en lo que consideramos papel. En algunas ocasiones, se requiere un papel muy brillante, o con una lisura especial, esto se consigue presionando entre dos rodillos llamados lisas. Otra aplicación de las lisas es la de modificar el calibre o grosor del papel mediante presión (Revilla, 2004).

Finalmente, el papel fabricado se **enrolla en grandes bobinas** para su posterior uso.

1.3 Importancia del agua en el proceso de producción de papel

Como se mencionó anteriormente, la producción de papel consume de agua en todas sus etapas, lo que la define como una actividad manufacturera intensiva en el uso del agua, como se ilustra en la figura 1.17:

Figura 1.17: Uso del agua en la producción de papel



Esquema simplificado de Bajjal, 2010

En la figura 1.17 las flechas azules representan la incorporación del agua en las diferentes etapas del proceso de producción del papel durante las actividades: Lavado de madera y astillas en la etapa de preparación de materias. Molido de astillas, producción de vapor y dilución de químicos añadidos para separar corteza y lignina en el proceso de preparación de la pulpa. Dilución de blanqueadores en la etapa de blanqueado, proceso de ducha y dilución de la pasta de celulosa para ser extendida en la tela de la máquina de papel (agua de ducha) al realizarse la formación de hojas.

Contabilizar la cantidad de agua que se requiere en el proceso de producción de papel no es una tarea sencilla, con el propósito de tener un panorama general del consumo de agua en el mundo, en el cuadro 1.2 se muestra la información estadística recopilada sobre el uso del agua en México, India y África y se buscó comparar sus consumos de agua en cada una de sus etapas.

Cuadro 1.2: Consumo productivo de agua en México, India y África por etapas del proceso de producción

Consumo de agua en m ³ por tonelada de papel						
Etapas de producción de papel	Industria México (1978)	%	Industria en África (2000)	%	Industria en la India (2003)	%
Preparación de materias primas	-	-	-	-	0.8	1.5
Elaboración de pulpa	7.24	15.34	30	37.5	21.7	42.71
Proceso de blanqueado	3.39	7.18	50	62.5	11.0	21.65
Formación de hojas	36.56	77.47	-	-	17.3	34.05
Total	47.19	100	80*	100	50.8**	100

Fuente: * Macdonal , 2004, ** Tewari, 2009, *** Dirección General de usos del agua,1976.

En el cuadro 1.2 se describe el uso del agua en la industria de papel en tres regiones: México, África e India, se observa que sólo existe información de todas las etapas del proceso para el caso de una planta productora de papel en la India. Para este ejemplo se tiene el menor porcentaje de consumo en la preparación de hojas de 1.5 % y el mayor consumo de agua en la formación de pulpa con un porcentaje de 42.71%.

Para el caso de los otros 2 ejemplos, sólo se obtuvo información de 3 de las etapas del proceso de producción (Elaboración de pulpa, blanqueado y formación de hojas). Sin embargo, vale anotar, que en el ejemplo de la empresa hindú se reporta un consumo de agua muy bajo la etapa de preparación de materias primas por lo que es perfectamente compatible la comparación entre los países.

La región que registró el mayor consumo de agua total es África (80 m³ por tonelada) y México registró el menor consumo (47.19 m³ por tonelada). Además, hay que considerar que el dato para México es de 1973 y el de África del 2000, lo cual muestra el uso más eficiente del primero. La India utiliza 50.8 m³ por tonelada de papel para el 2003, ubicándose en la media de los dos países mencionados.

En el cuadro anterior también se describe la participación de cada etapa en el total del respectivo proceso, cada región tiene diferentes participaciones. El más alto es de 77.47% en México en la formación de hojas de papel. En segundo lugar, se encuentra en 62.5 % para la región de la África en el proceso de blanqueado y en tercer lugar el 42.71% en la India para la elaboración de pulpa.

El uso del agua también depende del tipo de papel que se desea producir, en el cuadro 1.3 se describe el consumo de agua para la elaboración de distintos tipos de papel. Como puede verse en el cuadro 1.3, el papel para impresión y escritura y el papel para escritura de acabado fino son los que más agua consumen (hasta 600 m³ por tonelada) debido a que requieren del proceso de blanqueado. Por el contrario, para el caso de los papeles que no requieren ser blanqueados, como es el caso de papeles de embalaje y periódico, se porta un menor uso de agua (150 y 200 m³).

Cuadro 1.3: Consumo de agua por diferentes tipos de papel

Tipo de papel	Consumo de agua (m ³ / ton producida)
Periódico	200
Papel para impresión y escritura	500
Papel para escritura de acabado fino	600
Papel para embalaje y cartón	150
Otros	330

Adatado de Knema México: Paper Industry, 2016

1.3.1 Recirculación de agua en la producción de papel

Como se mencionó en secciones anteriores, la Industria de papel se caracteriza por ser intensiva en el uso del agua. Para enfrentar la problemática del alto consumo de agua en la industria de papel se ha buscado desarrollar tecnología que permita reducir el consumo de agua, un ejemplo del desarrollo tecnológico es la implementación de sistemas de recirculación en plantas que producen papel a partir de fibras recicladas. El sistema de recirculación permite ahorrar materiales, disminuir el consumo de agua potable o fresca y reducir impactos ambientales.

El proceso de recirculación de agua se aplica durante el proceso de formación de hojas. La recuperación ocurre en el proceso de eliminación de exceso de agua de las hojas de papel, y al agua recuperada se le denomina **agua blanca** debido a su concentración de pasta blanca.

El sistema de recirculación consiste en un circuito cerrado y cuenta con tres partes: la recirculación corta, la larga y la externa. En la figura 1.18 se muestra un diagrama de bloques del proceso de recirculación.

Dependiendo el tipo papel que se requiera producir se determina el grado de tratamiento que se requiere para eliminar los componentes químicos del agua blanca e insértala en diferentes etapas del circuito.

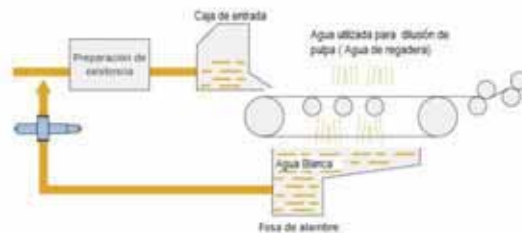
Figura 1.18: Proceso de recirculación



Fuente: Adaptado de National Service Center for Environmental Publications (NSCEP), 1976

En la recirculación corta, el proceso consiste en la recolección del agua blanda en un contenedor, esta agua es filtrada debido a que el agua proveniente de la máquina de papel contiene arena e impurezas y es diluida (ver figura 1.19). Durante esta etapa, también se recupera parte de la fibra proveniente de la formación de hojas. La fibra recuperada es tratada y se incorpora nuevamente a la caja de entrada de la máquina de papel.

Figura 1.19: Recirculación corta



Adaptado de: (VTT Industrial systems)

La segunda etapa es la recirculación larga, durante la cual el agua blanca recuperada recibe un pretratamiento, el cuál puede consistir en una planta de sedimentación o flotación.

En la recirculación externa, el agua blanca incluye un proceso de clarificación, así como un tratamiento biológico. Algunas veces parte del agua clarificada se usa en la dilución de hojas.

Un ejemplo del ahorro generado por la implementación del sistema de recirculación, lo proporciona una empresa ubicada en Finlandia que muestra el agua usada antes y después de la adopción del sistema de recirculación (Area, 2005). En el cuadro 1.4, en la segunda columna se describe el consumo de agua en el proceso de producción de papel antes de implementar el sistema de recirculación y en la tercera columna se describen el agua usada después de aplicar el uso de la recirculación. En el cuadro 1.4 también se puede observar que el proceso de recirculación permitió una reducción de consumo de agua, principalmente en el proceso de blanqueado.

Cuadro 1.4 Reducción de consumo de agua por recirculación en el circuito cerrado en Metza Botnia Finlandia

Consumo de agua	Fabricación antes de recirculación (m ³ /Ton de pulpa procesada)	Fabricación después de recirculación (m ³ /Ton de pulpa procesada)
Preparación de materias primas	4.1	1.5
Preparación de pulpa	0.4	0.4
Blanqueado	28.1	5.1
Evaporación y calderas	2.4	2.1
Total	35	9.1

Fuente. Reilama, I. and Merikallio, T. A modern pulpmill with a minimum environmental impact. Preprints of CPPA Technical Section Annual Meeting, Montreal, p. A349, Jan 1998

En el cuadro 1.5 se describe como algunos países han reducido su consumo de agua potable (m³) por cada tonelada de papel producida. La tecnología de producción de papel registra situaciones diversas en diferentes regiones y periodos. Se comparan datos de una misma región con dos escenarios diferentes, antes y después de la implementación del sistema de recirculación.

Cuadro 1.5: Uso del agua en recirculación en la producción de papel en diferentes regiones del mundo

Lugar /región	Consumo de agua por tonelada de papel en el año inicial (m ³ /ton)	Consumo del agua después del cambio tecnológico en el año final (m ³ /ton)	Reducción de consumo de agua por recirculación (m ³ /ton)	Periodo en que se registró el cambio tecnológico (sistema de recirculación)
Confederación Europea de Industrias de Papel (CEPI): Austria, Bélgica, República Checa, Finlandia, Francia, Alemania, Hungría, Italia, Países Bajos, Noruega, Polonia y Portugal.	100	60	40	1965- 2001 (36 años)
Alemania	50	10	40	1970 – 2001 (30 años)
México	65.1	34.2	30.9	1973- 2002 (29 años)
Chile	140	40	100	1980- 2000 (20 años)
Industria Europea	24.5	15.5	9	Sin fecha
Finlandia	35	9.1	25.9	**a 2006

Fuente: Elaboración propia a partir de diversos autores

En el cuadro anterior, se muestra el resultado del ahorro en el consumo de agua gracias a la recirculación para países o regiones distintas. La confederación europea de Industria de Papel (CEPI por sus siglas en inglés), en conjunto lograron reducir su consumo de agua en 40 m³, de 100 m³ en 1965 a 60 m³ en el 2001.

En la tabla se puede apreciar que Finlandia es el país que tuvo el mejor aprovechamiento de su recurso hídrico, al utilizar 9.1 m³ por tonelada. En 1973, México se encontraba lejos de lograr un uso eficiente en la producción, al utilizar 65.1 m³ por cada tonelada de papel producida, y logro mejorar a partir del 2002, debido al avance tecnológico, así como a las diferentes formas de producción, por ejemplo, plantas no integradas (en las cuales la pulpa ya ha sido creada en otra planta, pero con un menor consumo de agua), en contraste con las de formación de pulpa en la misma planta (plantas integradas), sin embargo el consumo de agua en la producción en México para el 2002 se encontraba por encima del promedio internacional.

Chile en 1980 tuvo un alto consumo de agua en la producción de papel (140 m³ por tonelada), sin embargo, fue la región donde se registró la mayor reducción del uso del agua, al ser en el 2000 de 40 m³ por tonelada.

Finalmente, la menor reducción el consumo del agua de la que se tiene información fue una región en Europa, disminuyendo el consumo 24.5 m³ a 15.5 m³ por tonelada que represento un ahorro del 9 m³.

1.4 Estado del arte en la Innovación Tecnológica en la producción de papel en el mundo en el siglo XXI

Actualmente, los países que se encuentran a la vanguardia en el desarrollo tecnológico de producción de máquinas de papel son, Finlandia, Austria y Alemania. Algunas empresas líderes son las siguientes:

METSO, Finlandia es una empresa líder mundial en equipos para la fabricación de celulosa y papel. Desarrolló un conjunto de procesos de producción de pulpa para satisfacer diferentes demandas a costos eficientes, así como ahorros en sus procesos de fabricación de papel. (Cerutti, 2013).

PÖYRY, Finlandia es una empresa dedicada a la consultoría e ingeniería en proyectos que requieran equilibrio ecológico sustentable. Su experiencia se acredita en proyectos en el campo de la energía, industria del transporte, agua y saneamiento y medioambiente (Cerutti, 2013).

ANDRITZ, Austria: ofrece una gama amplia de equipos para el sector en producción de fibras, procesos mecánicos, reciclado de pulpa, generación de energía por biomasa, equipos para fabricación de papel tisú. También ofrece mantenimiento, reemplazo de partes, apoyo y asistencia técnica (Cerutti, 2013).

VOITH, Alemania: trabaja en el área de metalmecánica para la industria de celulosa y papel (Cerutti, 2013).

En el sector europeo, existen proyectos piloto, dedicados al desarrollo de procesos de producción de papel con el mínimo consumo de agua. Por ejemplo, con el propósito de eliminar el consumo de agua en el proceso de producción, se ha analizado la capacidad de las plantas para producir sus propios disolventes. Una planta, a partir de la mezcla de dos sólidos, puede obtener líquido a temperatura ambiente conocido como disolvente eutéctico profundo (Deep eutectic solvents, DES por sus siglas en inglés).

Con el uso del DES producido por las plantas, se puede disolver la madera separando las fibras de la lignina a temperatura ambiente, eliminando el consumo de agua y energía. El DES también se utiliza para disolver los residuos de tinta del papel y posteriormente separarlos de las fibras recicladas (Asociación Española de Fabricantes de Pasta, Papel y Cartón (ASPAPL), 2017).

Otro avance tecnológico, que busca eliminar el consumo de agua se basa en la **súper-cavitación**, se da cuando parte de un líquido a alta velocidad, forma una depresión tan fuerte que el líquido pasa a su forma de gas, lo que permite reducir la fricción. En la fabricación de papel las fibras son tratadas para protegerlas y después ser suspendidas en una solución viscosa. La solución se prensa y a partir de la hoja resultante se obtiene el papel (Asociación Española de Fabricantes de pasta, papel y Cartón (ASPAPL), 2017).

En temas económicos existe una propuesta basada en la economía circular, la cual se apoya en los fundamentos de la escuela ecologista, y propone un cambio al paradigma “reducir, reutilizar y reciclar” por una transformación más profunda y duradera, que permita disminuir el impacto causado por las actividades humanas sobre el ambiente. En la industria de papel el concepto de

economía circular se encuentra presente en la reducción de materia prima renovable, las empresas forman una simbiosis, ecoeficiencia en el uso de agua y energía.

Las regulaciones ambientales se han uniformizado en países que siguen rigurosamente dichas regulaciones y surgió el concepto: “mejores tecnologías disponibles” (Best available thecnology por sus siglas en inglés, BAT) para identificar a las industrias con mejores tecnologías y tomarlas como base de comparación. Las mejores tecnologías se basan en las siguientes actividades: descortezado en seco, monitoreo y optimización del uso del agua, evaluación de sistemas de recirculación, separación de agua con menor grado de contaminantes, provenientes de bombas y válvulas, separación de agua utilizada en el sistema de enfriamiento, optimización de los diseños y construcción de los tanques e implementación de sistemas que permiten recolectar derrames accidentales (World Bank Gorupa, 2010)

Conclusiones del capítulo 1

Desde su surgimiento en China, la **receta para producción del papel** se fue modificado tanto en el uso de diferentes materiales como en los tipos de árboles para la obtención de la madera.

El uso de papel tiende a reducirse con las computadoras, sin embargo, el crecimiento de su demanda en otros usos es innegable. Es un bien muy importante en el mundo ya que es el principal soporte de la escritura, y está presente en envolturas, envases y es fundamental para cubrir las necesidades de la población de cualquier región o localidad del mundo

El desarrollo de molinos facilitó la producción de papel, que era un trabajo complicado y su principal materia prima eran las telas. En la era moderna, la madera y el agua han sido los principales insumos a través de los años y la principal herramienta de producción es el pulper.

El surgimiento de la primera imprenta provocó un aumento la demanda del papel surgiendo la necesidad de buscar una mayor velocidad de producción dando como resultado el surgimiento de la pila holandesa (antepasada del pulper) que facilitó la fabricación de pasta de celulosa, y de la primera máquina de papel que facilitó la producción de las hojas de papel.

En el transcurso del tiempo tanto en México como el mundo, la escasez de recursos ha sido una restricción en la producción. Recuérdese principal la limitante en producción fue la escasez de telas y, la forma de enfrentar dicha escasez fue por medio de la sustitución de la tela por la madera para la fabricación de la celulosa.

La opción de adquirir pulpa deshidratada permite a los establecimientos (conocidos como plantas no integradas) producir papel sin la necesidad de adquirir directamente la madera para la producción de pasta, este cambio implica que la empresa utilice una cantidad menor de agua ya que esta puede omitir las etapas de preparación de materias primas, así como a la producción de la pulpa.

La producción de papel a partir de fibras recicladas ha permitido reducir el consumo de madera, sin embargo, el uso de fibras recicladas implica el uso de agua para la remoción de tintas antes de que las fibras puedan ser reutilizadas.

El desarrollo tecnológico en la producción de papel en sus inicios se vio reflejado con el surgimiento de la pila holandesa y la máquina de papel; en el siglo XXI con el desarrollo de nuevas formas de producción de pulpa; y en fechas más recientes con la innegable necesidad de optimizar los recursos, desarrollando máquinas con mayor eficiencia energética, sistemas de recuperación de químicos y el más destacable para este trabajo, el sistema de recirculación de agua que ha mostrado grandes ahorros en el consumo del agua.

Debido que existen diferentes tipos de papel, que poseen características y calidad diferentes, existentes diferencias en la producción del papel. Los altos estándares de calidad del papel con alto grado de blancura requieren adicionar una gran cantidad de químicos, los cuáles les dan las propiedades buscadas. El uso de dichos químicos involucra un alto consumo de agua, así como la contaminación de esta.

Una consecuencia del aumento de la producción de papel en el mundo ha sido la preocupación por la reducción de uso de materiales, agua y energía por unidad de producto. Y esto se ha reflejado en que la maquinaria utilizada en la producción de papel haya sufrido grandes modificaciones. Ejemplo de esta mejoría fue el surgimiento de las “BAT”, donde la principal preocupación es desarrollar sistemas que permitan la recuperación de agua y químicos utilizados durante la producción y el blanqueado de pulpa.

La preocupación por conservar el ambiente en la industria de papel se vio reflejada con el caso de la empresa Peña Pobre que desarrollo los sistemas de captura de gases, oxidación de químicos contaminantes y los primeros sistemas de recirculación. La implementación de sistemas de recirculación ha permitido ahorros notables de agua y materiales. En el caso de México existe un gran contraste entre el consumo registrado en el 1973 hasta un menor consumo logrado para el 2002.

En México es muy notorio el desarrollo tecnológico para la producción de papel, desde que nuestros antepasados comenzaron a fabricarlo para múltiples usos, utilizando fibras para su elaboración, hasta la llegada de la máquina de papel. Pero el desarrollo se vio a causa de las normas impuestas por España, y de no ser por los esfuerzos para continuar la producción de papel en molinos clandestinos, este desarrollo se hubiera visto frenado por un periodo más largo de tiempo.

El desarrollo tecnológico “consumo cero de agua” ha surgido por las tecnologías que buscan sustituir este recurso con nuevos solventes o equipos que no utilicen agua para diluir la pasta, sin embargo, estos proyectos se encuentran en etapa piloto y no se ha logrado prescindir del uso del agua para la producción de papel.

El proceso de producción de papel descrito con detalle en este capítulo se expresará en forma conceptual en el siguiente capítulo en que, a partir de la clasificación de los insumos en los cuatro grupos aquí descritos, materias primas (**M**), capital (**K**), trabajo (**L**) y agua (**W**), se expresa el proceso tecnológico que explica dicho proceso.

Capítulo 2 : DISEÑO DEL MODELO MATEMÁTICO DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN

2.1.1 Modelos de múltiples variables

Las situaciones prácticas se pueden representar con funciones identificadas por la expresión $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dichas funciones pueden depender de una sola variable como es el caso del área de un cuadrado $A = f(x) = x^2$, ya que su área está sólo en función de la longitud de uno de sus lados (x). Cuando el problema depende de una sola variable independiente, los pares de puntos (formados por el valor que toma la función y por la variable independiente) se pueden representar en el plano cartesiano $R \times R = R^2$, R representa al conjunto de números reales, el número 2 ubicado en el exponente de R representa las dimensiones utilizadas en el problema y el símbolo cruz (\times) representa a las combinaciones de cada par de puntos de las variables dependientes e independientes) y se puede representar como un área. Donde el eje y se usa para representar el valor de la función y el eje x para representar la variable dependiente.

Otro ejemplo de cálculo del área es el rectángulo (A_R), en esta función el área está en función de dos variables, su base x_1 y su altura x_2 .

$A_r = f(x_1, x_2)$ de un rectángulo cuya base es x_1 y su altura es x_2 .

$$A = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

En este caso se tienen dos variables independientes y una dependiente. Cuando depende de 2 variables independientes representa un volumen en tres dimensiones (R^3).

De forma gráfica se pueden ilustrar hasta 3 dimensiones y cuando se desean analizar aspectos geométricos (como búsqueda de máximos, mínimos, análisis de concavidad y convexidad) es necesario reducir las tres dimensiones a solo dos dimensiones. Para hacerlo es conveniente estimar las curvas de nivel. Las curvas de nivel tienen aplicaciones en disciplinas como la ingeniería, ciencias ambientales, economía, etc.

Esta proyección es útil para representar geométricamente una función de dos variables y es semejante a la representación de un relieve tridimensional por medio de un mapa topográfico bidimensional.

Los problemas de ingeniería se pueden representar por medio de modelos matemáticos que pueden ser de tipo lineal (no se multiplican entre ellas, ni se elevan a algún exponente) o no lineal (se multiplican entre ellas o se elevan a alguna potencia) que dependen de múltiples variables.

La expresión general de una **función de múltiples variables** se expresa de la siguiente forma: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde (x_1, x_2, \dots, x_n) es el vector de **variables independientes** y **z es la variable independiente**.

A continuación, se describen algunos ejemplos de casos de funciones que dependen de dos variables independientes (x_1, x_2) . Este caso se puede generalizar para n variables.

Gráfica de una función de 3 variables

Si se define a **z** como la variable dependiente que representa el valor de la función y depende de dos variables $z = f(x_1, x_2)$, entonces x_1 y x_2 son las variables independientes por lo cual, la gráfica de la función consta de todos los puntos cuyas coordenadas cartesianas están determinadas por las ternas ordenadas cuyo dominio son los números reales. Esta gráfica un espacio tridimensional (x_1, x_2, z) de \mathbb{R}^3 .

En los ejemplos descritos a continuación, el dominio de las variables independientes incluye los números reales, sin embargo, en este trabajo sólo se ilustrará el caso en el que x_1 y x_2 toman valores positivos.

2.1.2 Modelo lineal con dos variables $z = f(x_1, x_2)$

En general un modelo lineal se expresa por medio de la expresión:

$$z = f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2$$

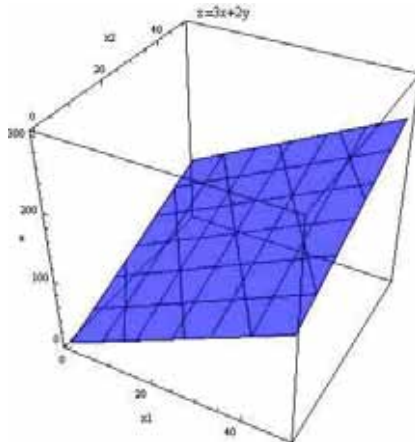
donde, **A** y **B** representan los valores que pueden tomar los coeficientes de la ecuación de un plano en el espacio.

Un modelo lineal específico se representa con la siguiente ecuación:

$$z = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

La ecuación anterior es un modelo lineal del valor **z** (la variable de interés), en este caso **z** es el dominio de las variables x_1 y x_2 , y su gráfica modela la región de números positivos $0 \leq z \leq 300$, es la siguiente.

Gráfica 2.1: Plano $z = 3x_1 + 2x_2$

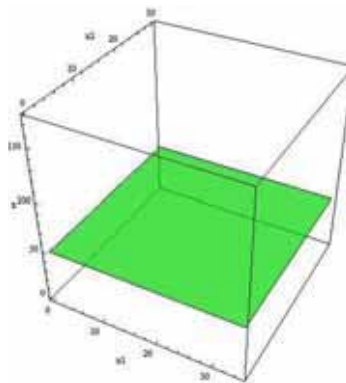


La ecuación $z=f(x_1, x_2) = 3x_1+2x_2$ representa un plano en el espacio tridimensional, la variable dependiente es z y las variables independientes son x_1, x_2 . El eje x representa a la variable x_1 , el eje y a la variable x_2 , el eje z el valor de la función. La gráfica describe todos los posibles valores de z, x_1, x_2 , que resuelven la ecuación para números positivos y definen un plano ubicado en tres dimensiones. Para el caso en la particular seleccionado, la gráfica sólo se presentan valores de z que van de cero hasta 300, es decir, una fracción del plano.

2.1.2.1 Representación de la variable z a través de curva de nivel

En el espacio tridimensional las alturas de z se pueden representar con planos paralelos al plano x_1x_2 . Cuando se le asigna un valor constante específico, se tiene un plano paralelo a los ejes x_1x_2 y se presenta con la ecuación $z=c$. Es decir, una altura dada a la variable z . La siguiente gráfica 2.2 ejemplifica un plano paralelo con altura $z=50$.

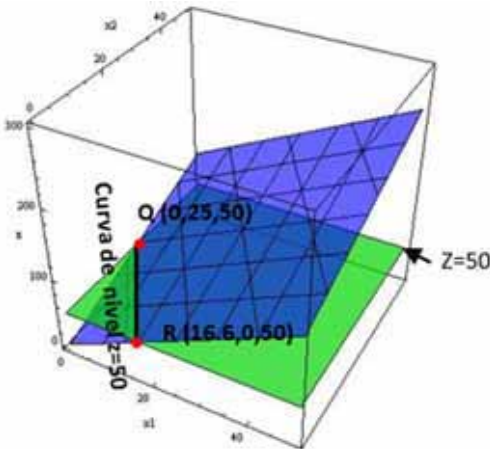
Gráfica 2.2: Plano paralelo $z=50$



Cuando se tiene una intersección de un plano con una ecuación de la forma z , con un plano de altura constante $z=c$. Se tiene como resultado una recta de nivel. La recta descrita tiene una ecuación siguiente: $Ax_1+Bx_2=c$, la recta se ubica a la altura que tome la constante c , esta recta localizada en la superficie $z=f(x_1, x_2) = Ax_1+Bx_2$.

Por ejemplo, sí se representa el plano $z= 3x_1 + 2x_2$ (azul) y el plano paralelo a x_1x_2 , $z=50$ en el mismo gráfico, entonces se tiene como resultado la gráfica 2.3, en la que se muestra la intersección, conocida como recta de nivel.

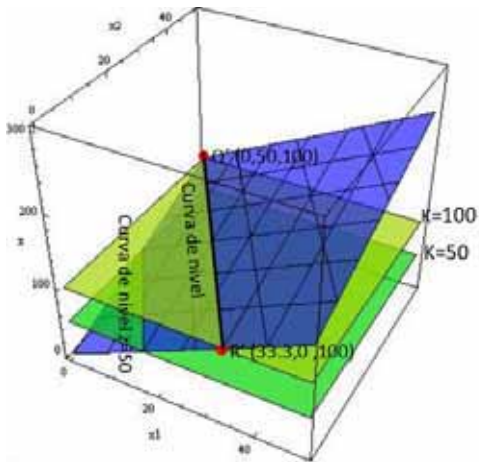
Gráfica 2.3: Recta de intersección (recta de nivel)



La intersección se produce a la altura $z=50$, se observa que el corte de los planos define una línea recta. Ésta recta representa todas las combinaciones de x_1 y x_2 que permiten obtener un valor de $z=50$ en el plano de la ecuación $z= 3x_1 + 2x_2$. Por ejemplo, los puntos $Q(0, 25, 50)$, $R(16.6, 0, 50)$, registran diferentes valores para x_1 y x_2 que dan como resultado $z=50$. La línea de corte se define como una **línea de nivel**, puesto que se ubica en el nivel (altura) de 50.

Cuando se elige una altura mayor para un nuevo plano de intersección, por ejemplo, $z=100$, plano en amarillo en la siguiente gráfica, se tiene que la curva de intersección corta al plano de la función (plano azul), donde las variables independientes representan valores de z más altos respecto a los puntos Q, R , por ejemplo, los puntos son $Q'(0, 50, 100)$, $R'(33.33, 0, 100)$. La línea que define la unión de los puntos Q' y R' se define como **curva de nivel** para el valor de 100. En la gráfica 2.4 se ilustran ambas curvas de nivel.

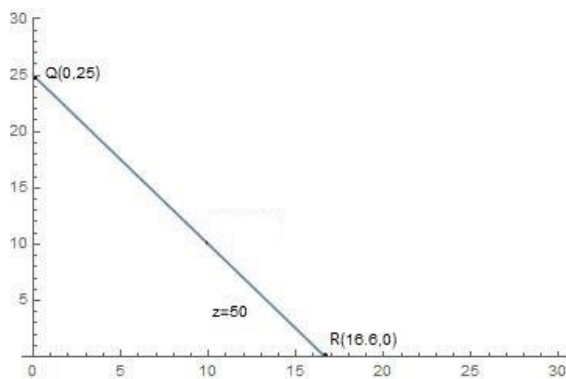
Gráfica 2.4: Dos curvas de nivel



Para la solución de diversos problemas, por ejemplo, los de maximización, resulta conveniente proyectar las curvas de nivel sobre un plano cartesiano viéndolas desde arriba (vista superior).

Esto se realiza de la siguiente forma. Por ejemplo, para la curva de nivel a la altura 50 se tiene lo siguiente: suponga que la superficie azul e inclinada de la figura previa (conjunto de todas las combinaciones de $3x_1 + 2x_2 = z$) se ve intersecada por el plano $z=50$. Considere que la línea de intersección se proyecta sobre el plano x_1x_2 . Esta línea proyectada en el plano x_1x_2 se ve de la siguiente manera:

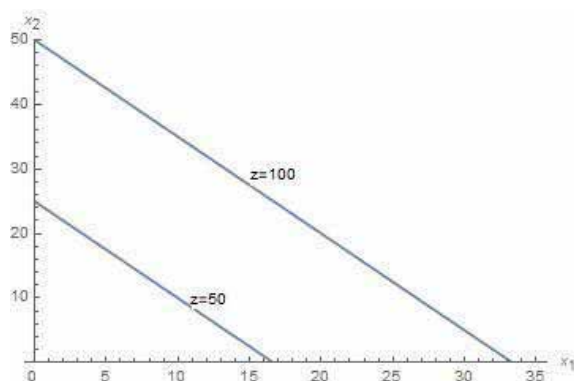
Gráfica 2.5: Recta de nivel proyectada



Los puntos originales de la curva de nivel son Q (0, 25, 50), R (16.6, 0, 50), son proyectados y se ubican en los mismos x_1 y x_2 correspondientes, es decir de acuerdo con las coordenadas mencionadas se ubican en el plano en Q (0, 25), R (16.6, 0). Entonces, la curva de nivel de tres dimensiones ahora se puede representar fácilmente en dos dimensiones y su ecuación es $3x_1 + 2x_2 = 50$, en este caso define una recta que se denomina curva de nivel. Esta ecuación se interpreta considerando que cada punto de la curva de nivel corresponde a todas las soluciones del plano, que corresponden a la altura de $z=50$ unidades.

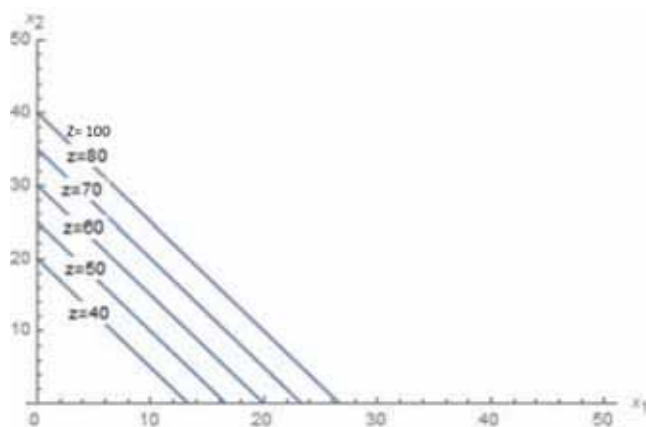
Al considerar la proyección de la curva de nivel más alta como $z=100$ en el plano cartesiano (gráfica 2.6), se tiene que esta se ubica a la derecha de la curva de nivel previa ($z= 50$) mostrando que tiene el doble de la altura de la primera.

Gráfica 2.6: Rectas de nivel proyectadas



Si se continúa creando más curvas de nivel al intersectar planos paralelos de alturas $z=40, 60, 70, 80$ y 100 con el plano de soluciones de la misma función $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$, y las proyectamos en el plano cartesiano de la misma manera que las curvas previas se obtiene el gráfico 2.7:

Gráfica 2.7: Familia de curvas de nivel



Las curvas de nivel proyectadas en la gráfica son líneas paralelas que se alejan del origen (avanzan a la derecha) a medida que aumenta su altura (el valor de z), y cada una explica un nivel constante de z en todos los puntos sobre la misma recta.

En el plano cartesiano las rectas proyectadas se interpretan de la siguiente manera: la recta definida como $z = 100$ en la gráfica registra la ecuación $100 = 3x_1 + 2x_2$ y se gráfica con el conjunto de valores de x_1 y x_2 que producen un valor constante de 100. La recta definida como $z = 50$ en la gráfica tiene como ecuación $50 = 3x_1 + 2x_2$ y se forma por el conjunto de valores de x_1 y x_2 que explican un valor constante de 50. Y así para todas las demás curvas de nivel.

2.1.2.2 Propiedades de las rectas de nivel

Monotónica

Las ecuaciones lineales tienen la propiedad de que, si se multiplica cada una de las variables independientes por una constante k , el valor de la función (z) tendrá un aumento en el valor final por la misma constante.

Esta propiedad se representa por la ecuación

$$kz = k f(Ax_1 + Bx_2) = f(kAx_1, kBx_2) = A(kx_1) + B(kx_2)$$

Para la ecuación aquí considerada, $z = 3x_1 + 2x_2$, dicha propiedad se comporta de la siguiente forma: si se evalúan x_1 y x_2 y luego se multiplica este resultado por el valor de la constante, el resultado debe ser el mismo que en el caso anterior. Considerando en los cinco puntos los valores de $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$ y $z = 5$, sus valores se multiplicarán por el valor que tome la constante k .

Cuadro 2.1: Propiedad lineal

k (proporción)	$x_1 = kx_1^0$	$x_2 = kx_2^0$	$z = 3x_1 + 2x_2$	$z = kz_0$
K=1	1	1	$3(1) + 2(1) = 5(1)$	5
K=2	2	2	$3(2) + 2(2) = 10 = 2(5)$	10
K=3	3	3	$3(3) + 2(3) = 15 = 3(5)$	15
		Igual		

Observando el cuadro, es claro que el comportamiento que sigue el valor de z es exactamente el mismo que el que siguen las variables x_1 y x_2 , es decir, z se duplica cuando las variables se duplican, se triplica cuando las variables independientes se triplican, etc. El valor de z cambia exactamente en la misma proporción que cambian las variables x_1 y x_2 , dicho comportamiento corresponde a una ecuación monotónica.

La propiedad monotónica de la función $z = f(x_1, x_2)$, explica que las líneas de nivel sean paralelas, porque avanzan de forma creciente en z cuando aumentan los valores de x_1 y x_2 y decrecen cuando disminuyen x_1 y x_2 . Estas son las rectas de nivel, ya que cada una explica un nivel constante de z en todos los puntos sobre la misma recta (gráfica 2.8).

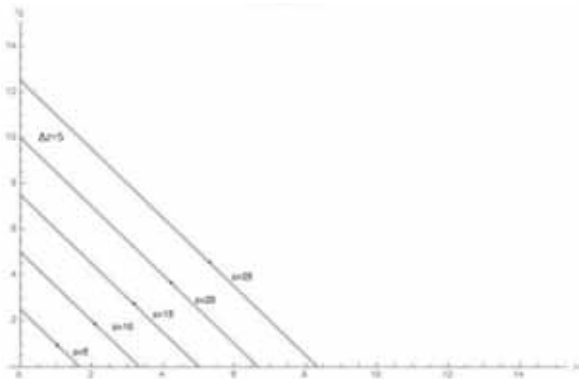
En el cuadro 2.2 se analiza el efecto que provocan incrementos de los valores de las variables x_1 y x_2 en una unidad, se produce un incremento positivo ($\Delta z = 5$), para esta ecuación ese incremento es siempre de 5 unidades cuando se adiciona una unidad más de cada variable. Este comportamiento se debe a que es una transformación monotónica. Partiendo de los valores iniciales $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ y $z = 5$.

Cuadro 2.2: Propiedad monotónica

x_1	Δx_1	x_2	Δx_2	$z=3x_1+2x_2$	$\Delta z= f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1, x_2)$
1		1		$3(1)+2(1)=5$	$[3(1+1)+2(1+1)]-[3(1)+2(1)]=5-0=5$
2	1	2	1	$3(2)+2(2)=10=2(5)$	$[3(2+1)+2(2+1)]-[3(2)+2(2)]=10-5=5$
3	1	3	1	$3(3)+2(3)=15=3(5)$	$[3(3+1)+2(3+1)]-[3(3)+2(3)]=15-10=5$
4	1	4	1	$3(4)+2(4)=20=4(5)$	$[3(4+1)+2(4+1)]-[3(4)+2(4)]=20-15=5$
5	1	5	1	$3(5)+2(5)=25=5(5)$	$[3(5+1)+2(5+1)]-[3(5)+2(5)]=25-20=5$
	Igual		Igual		Proporcional y en forma constante

El incremento señalado se muestra en las curvas de nivel de la gráfica 2.8:

Gráfica 2.8: Curvas de nivel



A partir de cada resultado obtenido, al evaluar cada punto de las variables independientes se obtiene una curva de nivel diferente, la cual se desplaza hacia la derecha cuando se incrementan las variables independientes (x_1 y x_2). Las curvas de nivel tomarán el nombre de isocuantas para el resto del trabajo.

2.1.2.3 Derivadas parciales

Cuando una función $f(\mathbf{x})$ depende de una sola variable independiente (\mathbf{x}), la derivada $f'(\mathbf{x})$ mide la tasa de variación de la función cuando la variable independiente cambia. Para funciones de dos variables $z = f(x_1, x_2)$, si se desea analizar la variación de la función respecto de los cambios de valores en las variables independientes es necesario conocer cada una de las derivadas parciales de la función con respecto a cada una de las variables independientes.

La derivada parcial de z con respecto a x_1 cuando la variable x_2 mantiene un valor constante el cuál se representa por el acento barrita en la parte superior \bar{x}_2 , se denota $\frac{\partial z(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} =$

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, \bar{x}_2)}{\Delta x_1}.$$

La derivada de $f(\bar{x}_1, x_2)$ con respecto a x_2 , cuando \bar{x}_1 se mantiene constante es $\frac{\partial z(\bar{x}_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_2}$.

Si se tiene $z = f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2$ representa a un modelo lineal. La derivada parcial con respecto a la variable x_1 , es la siguiente.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial(Ax_1 + Bx_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(Ax_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}(A\bar{x}_2) = A$$

Para el caso de la derivada con respecto a x_2 la derivada parcial es:

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial(Ax_1 + Bx_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(A\bar{x}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(Ax_2) = B$$

Para el caso específico $z = 3x_1 + 2x_2$ se tiene los siguientes resultados.

$$\frac{\partial z(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x_1}$$

$$\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{3(x_1 + \Delta x_1) + 2\bar{x}_2 - 3x_1 - 2\bar{x}_2}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{3x_1 + 3\Delta x_1 + 2\bar{x}_2 - 3x_1 - 2\bar{x}_2}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{3\Delta x_1}{\Delta x_1} = 3$$

Donde $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ significa que cambios en la variable independiente x_1 causan incrementos en la variable dependiente z mientras \bar{x}_2 se mantiene fijo.

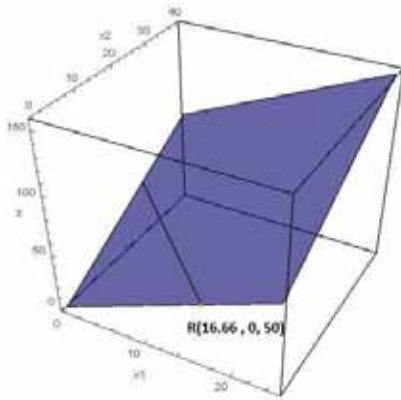
Para el caso de la derivada de z con respecto a x_2 :

$$\frac{\partial z(\bar{x}_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{3\bar{x}_1 + 2(x_2 + \Delta x_2) - 3\bar{x}_1 - 2x_2}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{3\bar{x}_1 - 3\bar{x}_1 + 2x_2 + 2\Delta x_2 - 2x_2}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{2\Delta x_2}{\Delta x_2} = 2$$

Donde $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ significa un cambio en la variable independiente x_2 dejando la variable x_1 constante.

El cálculo de la derivada de $z = 3x_1 + 2x_2$, de las derivadas parciales se puede ilustrar en forma discreta (en forma de incrementos). Esto se ilustra a continuación partiendo del punto **R (16.66, 0, 50)** ubicado en el plano que define el conjunto de soluciones potenciales de la ecuación $z = 3x_1 + 2x_2$, se destaca que este punto se ubica en la isocuanta $z = 50$ (Gráfica 2.9).

Gráfica 2.9: punto R



La variación de z cuando cambian las variables independientes se puede expresar en forma de incrementos. En el cuadro 2.3 se considera el incremento unitario de x_1 a partir del punto R y se realizan los cálculos para estimar el nuevo valor de z . El valor de x_2 se mantiene constante e igual a cero.

Cuadro 2.3: Incrementos de z con respecto a x_1

x_1	Δx_1	x_2	$z=3x_1+ 2x_2$	$\frac{\Delta z}{\Delta x_1}$
16.66		0	$3(16.66) +2(0) = 50$	
17.66	1	0	$3(17.66) +2(0) = 53$	$3[(17.66) +2(0)- [3(17.66) +2(0) = 53-50=3$
18.66	1	0	$3(18.66) +2(0) = 56$	$3(18.66) +2(0)- [3(17.66) +2(0)]= 56-53=3$
19.66	1	0	$3(19.66) +2(0) =59$	$3(19.66) +2(0) - [3(18.66) +2(0)] = 59- 56=3$
20.66	1	0	$3(20.66) +2(0) =62$	$3[(20.66) +2(0)]- [3(19.66) +2(0)]=62-59 =3$
	Igual			El incremento es constante e igual a 3

En el cuadro anterior se muestra que el incremento en z corresponde al valor del coeficiente de la variable que incrementa su valor, en este caso es x_1 y el valor de su coeficiente es igual a 3.

En el cuadro 2.4, se analizan los cambios por adicionar 1 unidad a la variable x_2 y manteniendo el valor de x_1 constante e igual a 16.66, partiendo nuevamente del punto R se tiene lo siguiente.

Cuadro 2.4: Incrementos de z con respecto a x_2

x_1	x_2	Δx_2	$z=3x_1+ 2x_2$	$\frac{\Delta z}{\Delta x_2}$
16.66	0		$3(16.66) +2(0) = 50$	
16.66	1	1	$3(16.66) +2(1) =52$	$3[(16.66) +2(1)-3(16.66) +2(0) =52-50=2$
16.66	2	1	$3(16.66) +2(2) =54$	$3(16.66) +2(2)- 3[(16.66) +2(1)]=54-52=2$
Igual	Creciente			El incremento es constante e igual a 2

Del cuadro 2.4 se puede observar que el cambio de z con respecto a x_1 , cuando x_2 se mantiene constante tiene como resultado dos, dicho valor corresponde al valor del coeficiente de la variable x_1 . Un aumento de una unidad en x_2 causa un incremento de 2 en z , y este comportamiento es constante a medida que se adicionan más unidades de x_2 .

La introducción de las derivadas variables permite introducir el concepto de **cambio marginal**. El aumento que causan x_1 y x_2 en z cuando la otra variable se mantiene constante se denomina **cambio marginal** de la variable que modifica su valor, debido a que lo que se estima son los incrementos adicionales o últimos.

Diferencial total

Si consideramos ambos cambios marginales juntos, equivale al cambio que juntas provocan en z cuando ambas variables se incrementan en uno. Esto es, la suma de ambos cambios muestra que, si x_1 adiciona 3 unidades y x_2 adiciona 2 unidades, juntas adicionan 5. Esto es así porque ambos incrementos son positivos y la función es monotónica.

Para el caso de la función $z=3x_1+ 2x_2$ se tiene el siguiente resultado:

Considerando $\Delta x_1 = 1$ y $\Delta x_2 = 1$ el incremento total es:

$$\Delta z = \frac{\Delta z}{\Delta x_1} (\Delta x_1) + \frac{\Delta z}{\Delta x_2} (\Delta x_2) = 3(1) + 2(1) = 5$$

Considerando que los términos Δx_1 y Δx_2 se hacen tan pequeños que están cercanos a cero el cambio en z se convierte en la siguiente expresión:

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \delta x_2$$

Para la función $z=f(x_1, x_2) = 3x_1+ 2x_2$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 3 \text{ y } \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} = 2$$

$$\delta z = 3\delta x_1 + 2\delta x_2$$

$$\delta z = 3 + 2 = 5$$

El resultado anterior muestra que el 100% del cambio en z se explica en un 60% por x_1 y 40% por x_2 . Lo anterior muestra que el cambio total en z se divide por cambios provocados por la variable x_1 y x_2 , y que siempre la suma de los cambios porcentuales de ambas variables será igual a cien, independientemente del valor que se considere fijo en x_1 y en x_2 .

2.1.2.4 Incrementos porcentuales de z con respecto a cada variable (elasticidades)

Elasticidad de z con respecto a x_1

Una vez definidas las derivadas parciales que representan cambios absolutos en el valor de z (valor de la función), lo siguiente es calcular el cambio porcentual de z debido a cambios porcentuales en la derivada parcial de x_1 .

$$e_{x_1}(x_1, x_2, z) = \frac{\%z}{\%x_1} = \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta x_1}{x_1}} = \left(\frac{x_1}{z}\right) \left(\frac{\Delta z}{\Delta x_1}\right)$$

El valor e_{x_1} recibe el nombre de elasticidad de la función z respecto a la variable x_1 y representa el cambio porcentual de z con respecto a x_1 . El resultado obtenido da una medida que no tiene dimensiones (es un porcentaje) y es posible compararlo al modelo en situaciones diversas.

La definición matemática de la elasticidad es la siguiente:

$$e_{x_1}(x_1, x_2, z) = \frac{\frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{x_1}{z}}{\frac{\partial z}{\partial x_1}} = \frac{x_1}{z} \frac{\partial z}{\partial x_1}$$

La elasticidad representa el tanto por ciento del incremento de la función por cada uno por ciento que se incrementa la variable x_1 , partiendo de un punto inicial a partir del cual se incrementa la variable x_1 y considerando que se mantiene fija la variable x_2 .

Para el caso específico de la función lineal $z = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$, se tiene que la derivada parcial de z con respecto a x_1 es la siguiente:

$$\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 3$$

Sustituyendo el valor de la derivada de z con respecto a x_1 y el valor de z en la expresión de la elasticidad se tiene la siguiente expresión:

$$e_{x_1}(x_1, x_2, z) = \frac{x_1}{z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{x_1}{3x_1 + 2x_2} (3) = \frac{3x_1}{3x_1 + 2x_2} (100)$$

De forma discreta se llega al mismo resultado como se ilustra a continuación:

$$e_{x_1} = \frac{\Delta \%z}{\Delta \%x_1} = \frac{\frac{3x_1 + 3\Delta x_1 + 2\bar{x}_2 - 3x_1 - 2\bar{x}_2}{\Delta x_1}}{\frac{\Delta x_1}{x_1}} = \frac{\frac{3\Delta x_1}{\Delta x_1}}{\frac{\Delta x_1}{x_1}} = \frac{3x_1 \Delta x_1}{(3x_1 + 2\bar{x}_2)(\Delta x_1)} = \frac{3x_1}{3x_1 + 2\bar{x}_2} (100)$$

En esta expresión se confirma que los cambios porcentuales en z dependen totalmente de los cambios en x_1 , dado que x_1 se encuentra en el denominador es claro que a medida que x_1 se incrementa el cambio en z tiende a cero. También se muestra que cuando x_2 tiende a cero su influencia en z es baja, a contrapunto, si x_2 es muy grande impacta en cambios porcentuales.

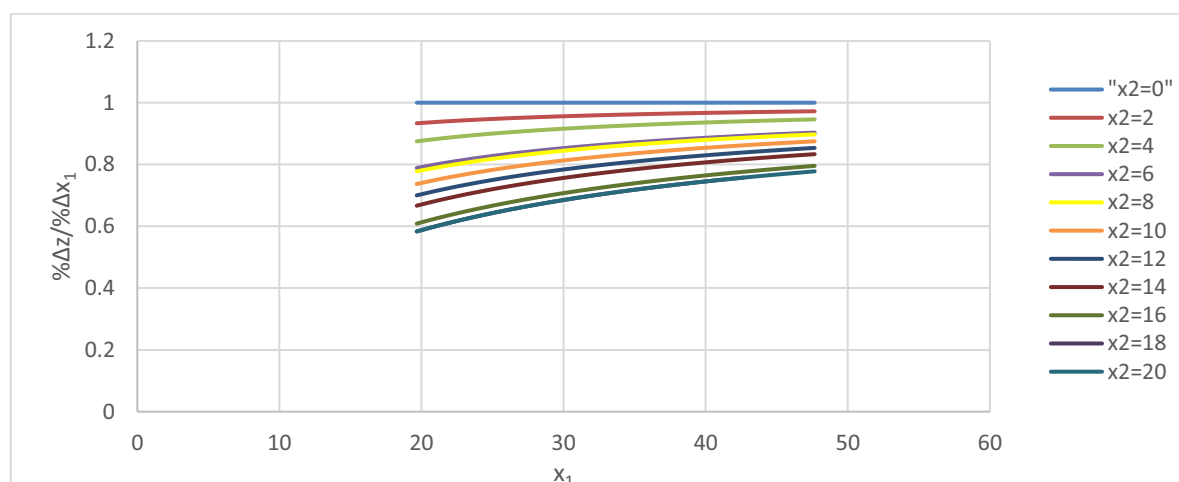
Por ejemplo, en caso particular si el valor de x_1 varía y \bar{x}_2 se considera constante e igual a cero entonces el valor de la función se reduce a la siguiente expresión:

$$e_{x_1}(x_1, x_2, z) = \frac{x_1}{z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{x_1}{3x_1 + 2x_2} \quad (3) = \frac{3x_1}{3x_1 + 0} = \frac{3x_1}{3x_1} = 1$$

En el caso particular que x_2 toma un valor igual a cero, se puede demostrar que la elasticidad toma un valor de uno.

Para analizar la expresión obtenida, lo primero es explicar el impacto del valor de x_2 en la elasticidad. En la gráfica 2.10 se puede ver que cuando x_2 es pequeña ($x_2=0$) la elasticidad es unitaria. Cuando x_2 es muy grande (p.e., $x_2=20$) se observa una elasticidad es menor a uno y que tiende a cero, a medida que x_2 se incrementa. En general, aunque x_2 se mantiene fija, su influencia en z depende de su magnitud. En el caso que el valor de la variable x_2 sea diferente de cero, el cambio porcentual de z es diferente al valor de $\% \Delta x_1$. En la gráfica se observa que a medida que aumenta el valor de la variable x_2 , (que mantiene su valor fijo), el valor de la elasticidad se acerca a cero ya que se aumenta su influencia en z , lo que se muestra en el descenso de las curvas de la elasticidad. Cada curva muestra una mayor curvatura a medida que aumenta el valor fijo de x_2 , ver líneas mostradas a continuación.

Gráfica 2.10: Elasticidades



En la gráfica se muestra que a medida que la variable x_1 se incrementa, el valor de su elasticidad con respecto a z (por ejemplo, en la línea naranja donde el valor fijo de $x_2=10$) varía con tendencia a incrementarse hasta el valor de uno, sea cual fuere el valor fijo de la otra variable.

En el cuadro 2.5 siguiente se estiman los incrementos porcentuales de las variables x_1 y z , partiendo de los cambios absolutos al aumentar la variable x_1 con un valor inicial de 16.66 e incrementando en una unidad y manteniendo fijo el valor de la variable x_2 .

Cuadro 2.5: Elasticidades de z con respecto a x_1

x_1	Δx_1	$\frac{\Delta \% x_1 = \frac{\Delta x_1}{x_1} (100)}{x_1}$	x_2	z	Δz	$\frac{\Delta \% z = \frac{\Delta z}{z} (100)}{z_1}$	$e_{x_1} = \frac{\frac{\Delta \% z}{z_1}}{\frac{\Delta \% x_1}{x_1}}$
16.66			0	50			
17.66	1	1/16.66=6.0	0	53	3	3/50=6.00	1
18.66	1	1/17.66=5.66	0	56	3	3/53=5.66	1
19.66	1	1/18.66=5.35	0	59	3	3/56=5.35	1
	Igual				Constante=3		Elasticidad unitaria y constante

Elasticidad de z con respecto a x_2

Para el análisis de la relación de incrementos porcentual de la variable x_2 y su impacto en el valor del incremento en z . La elasticidad de z con respecto a x_2 se expresa de la siguiente forma:

$$e_{x_2}(x_1, x_2, z) = \frac{x_2}{z} \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{x_2}{3x_1 + 2x_2} (2) = \frac{2x_2}{3x_1 + 2x_2}$$

Como se realizó en el apartado anterior, se puede comprobar que para un valor bajo de la variable que se considera fija, tiene poca relevancia. Es posible analizar el efecto que tiene la variable que se considera fija, que para este caso es la variable x_1 , cuando x_2 tiende al infinito, sin importar que valor tome la variable fija la elasticidad es unitaria.

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{2x_2}{3x_1 + 2x_2} = \frac{\frac{2x_2}{x_2}}{\frac{3x_1}{x_2} + \frac{2x_2}{x_2}} = \frac{2}{\frac{3x_1}{x_2} + 2} = \frac{2}{2} = 1$$

Este comportamiento se puede apreciar en el cuadro 2.6. En el que se calcula en valor de la elasticidad de la función $z = 3x_1 + 2x_2$, cuando se considera constante a x_1 .

Cuadro 2.6: Elasticidad de z con respecto a x_1

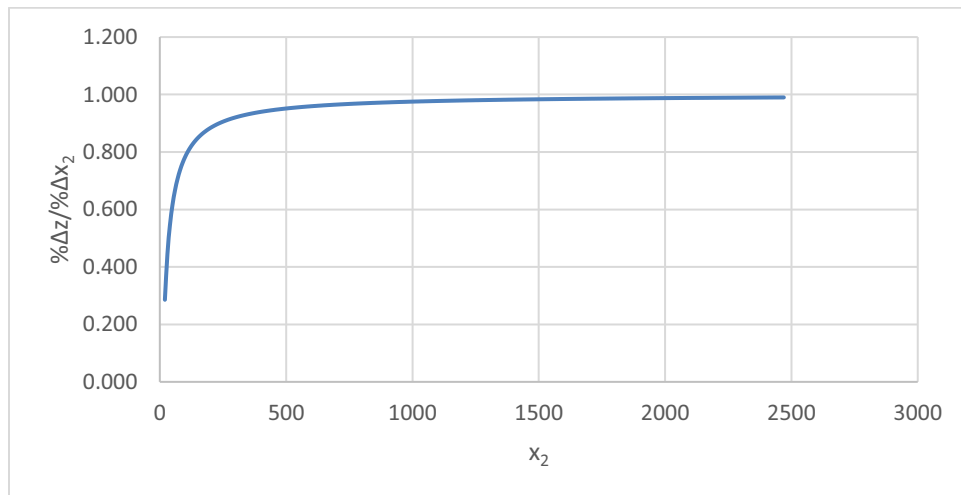
\bar{x}_1	x_2	Δx_2	$\%x_2 = \frac{\Delta x_2}{x_2} (100)$	$z = 3\bar{x}_1 + 2x_2$	Δz	$\% z = \frac{\Delta z}{z} (100)$	$e_{x_2} = \frac{\% \Delta z}{\% \Delta x_2}$
16.67	300		50.00	650		44.44	
16.67	400	100	33.33	850	200	30.77	0.923
16.67	500	100	25.00	1050	200	23.53	0.941
16.67	600	100	20.00	1250	200	19.05	0.952
16.67	700	100	16.67	1450	200	16.00	0.960
16.67	800	100	14.29	1650	200	13.79	0.966
16.67	900	100	12.50	1850	200	12.12	0.970
16.67	1000	100	11.11	2050	200	10.81	0.973
16.67	1500	500	50.00	3050	1000	48.78	0.976
16.67	2000	500	33.33	4050	1000	32.79	0.984
16.67	2500	500	25.00	5050	1000	24.69	0.988
16.67	3000	500	20.00	6050	1000	19.80	0.990

En el cuadro 2.6 se describe que para valores bajos de x_2 la elasticidad es menor a 1 y se acerca a cero. Visto a la inversa, la elasticidad se incrementa a medida que aumenta el valor de x_2 , llegando en el límite a un valor unitario (ver gráfica 2.13).

En resumen, la elasticidad es variable y creciente a medida que aumenta el valor de x_2 , en el límite es igual a uno.

Lo anterior, expresado en términos gráficos toma la siguiente forma.

Gráfica 2.11: Elasticidad de z con respecto a x_2



2.1.2.5 Cambios sobre una misma curva de nivel

Tasa de sustitución entre las variables independientes x_1 y x_2

La relación de la RTS se obtiene a partir del supuesto de que z se mantiene constante, el incremento de z es igual a cero.

$$\Delta z = \frac{\Delta z}{\Delta x_1} + \frac{\Delta z}{\Delta x_2}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x_1} + \frac{\Delta z}{\Delta x_2} = 0$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la derivada total de z se tiene la expresión:

$$\Delta z = VM_1(\Delta x_1) + VM_2(\Delta x_2) = 0$$

Despejando de la ecuación previa la relación $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ se obtiene la siguiente igualdad que se denomina Relación Técnica de Sustitución (RTS):

$$RTS(x_1, x_2) = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{VM_1(x_1, \bar{x}_2)}{VM_2(\bar{x}_1, x_2)}$$

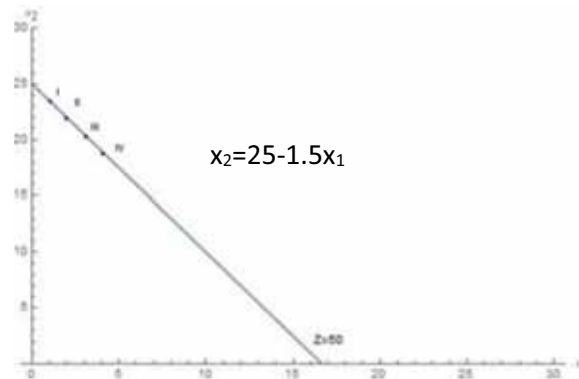
En la expresión anterior, las derivadas parciales de z respecto a x_1 y x_2 , se definen como **valor marginal** de z (VM_1 y VM_2) **respectivamente**.

$$\frac{\partial z(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1} \frac{\Delta z}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, \bar{x}_2)}{\Delta x_1} = VM_1$$

$$\frac{\partial z(\bar{x}_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2} \frac{\Delta z}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, x_2 + \Delta x_2) - f(\bar{x}_1, x_2)}{\Delta x_2} = VM_2$$

Lo que se analiza en este apartado se refiere a movimientos sobre la misma curva de nivel, por ejemplo, para la ecuación $z=3x_1+ 2x_2$ se considera su curva con $z=50$ (gráfica 2.12).

Gráfica 2.12: Curva de nivel $z=50$



En este caso, se analizan puntos sobre la curva de nivel $z=50$, y se analiza cómo se comporta la variable x_2 cuando se incrementa en una unidad la variable x_1 (ver cuadro 2.7).

Cuadro 2.7: TRS de x_1 y x_2

Punto	x_1	Δx_1	x_2 ($x_2=25-1.5x_1$)	Δx_2	RTS $m = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$
I	0		25		
II	1	1	23.5	-1.5	$-\frac{1.5}{1}$
III	2	1	22	-1.5	$-\frac{1.5}{1}$
IV	3	1	20.5	-1.5	$-\frac{1.5}{1}$
	Creciente		Decreciente	Negativo y constante	Constante

Mantenerse en la misma curva de nivel implica que no existe un incremento en la variable z ($\Delta z=0$). Considerando una altura de 50, la variable $x_2=25-1.5x_1$ se expresa en términos de la variable x_1 . Para el caso lineal la RTS la define la pendiente de la curva de nivel (m), que en este caso es constante. Para el caso de la recta seleccionada $50=3x_1+2x_2$, la RTS es igual a -1.5 ya que el $VM_1(x_1, \bar{x}_2) = 3$ y el $VM_2(\bar{x}_1, x_2) = 2$. Lo que indica esta relación es que, cuando se incrementa x_1 en una unidad siempre x_2 se reduce en 1.5 unidades para mantener el mismo nivel de $z=50$. Esto se interpreta como la capacidad de sustitución entre variables.

Elasticidad técnica de sustitución entre variables

Cuando se consideran cambios porcentuales de la RTS se denomina **elasticidad técnica de sustitución**, indica en cuanto se puede sustituir x_1 por x_2 medido en términos porcentuales.

$$\sigma_{RT} = \frac{\Delta\% \frac{x_2}{x_1}}{\Delta\% RTS}$$

Si se analiza la expresión para el caso específico del modelo lineal.

$$RTS = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -1.5$$

$$\%RTS = \frac{\Delta RTS}{RTS} = \frac{0}{RTS}$$

$$\sigma_s = \frac{\% \Delta \frac{x_2}{x_1}}{\% \Delta RTS} = \frac{cte}{0} = \infty$$

Se tiene que el valor de la **Relación Técnica de sustitución** tiene el valor constante igual a -1.5. (analizado en la sección anterior) lo que significa que la variación porcentual toma el valor de cero por lo que su elasticidad técnica de sustitución es infinita. Esto significa que siempre es posible sustituir x_1 por x_2 , pero se debe sustituir cada variable en la misma proporción.

2.2 Modelo del proceso de producción no lineal

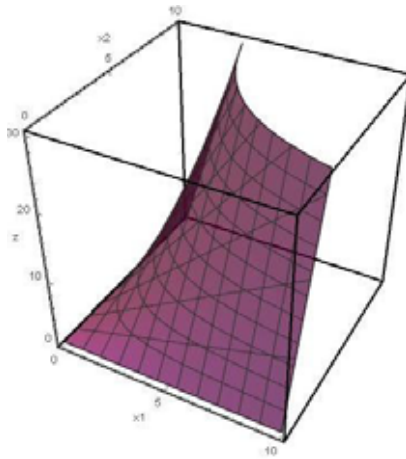
2.2.1 Modelos no lineales

Un ejemplo de un modelo no lineal es el que se genera a partir de un producto entre las variables independientes, la ecuación más simple queda definida de la siguiente forma:

$$z=f(x_1, x_2) = x_1x_2$$

En la gráfica 2.13 ilustra la ecuación señalada arriba en el espacio tridimensional, las soluciones potenciales de la ecuación considerando sólo números positivos definen una sección de una hipérbola equilátera y se observa para esta región que a medida que aumentan las variables x_1 y x_2 , el valor de z aumenta debido a que z describe el valor de la función y su altura. La variable x_1 se representa en el eje de las x y la variable x_2 en el eje y .

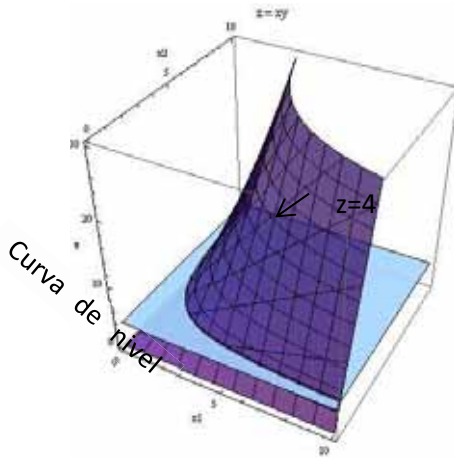
Gráfica 2.13: Ecuación $z=xy$



2.2.1.1 Representación de la variable z a través de curva de nivel

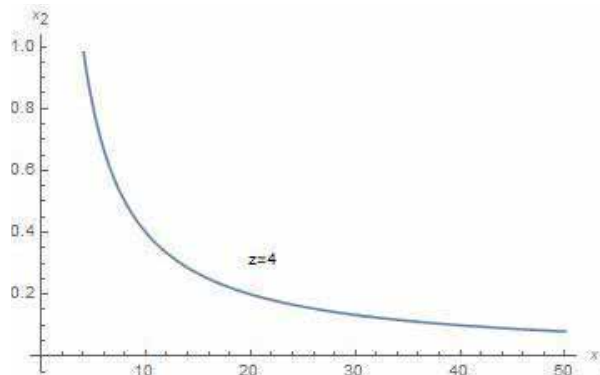
Siguiendo la misma mecánica del ejercicio lineal, se supone que un plano paralelo al plano que definen las variables x_1 y x_2 se eleva a una altura ($z=c$), lo que define la región de corte de la hipérbola equilátera, por ejemplo, la curva de nivel $z=4$. Ver gráfica 2.14.

Gráfica 2.14: Curva de nivel $z=4$



El plano ($z=4$) corta a la hipérbola formando la curva que adopta una forma cóncava. Esta curva se define por el conjunto de puntos para pares de valores de x_1 y x_2 que todos corresponden a altura de $z=4$ y se define como curva de nivel. Como en el modelo lineal, se proyecta la curva de nivel que define la intersección en el plano x_1 y x_2 , lo que se presenta en la gráfica 2.15.

Gráfica 2.15: Curva de nivel $x_1x_2=4$



La curva proyectada en el plano se conoce como curva de nivel y corresponde al nivel $z=4$, que indica que todos los puntos x_1 y x_2 que la forman registran el mismo valor de z (la misma altura 4). La ecuación que expresa la curva de nivel en el plano es $x_1x_2=4$, y tiene como límites los ejes x_1 y x_2 .

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{4}{x_1} = 0, \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{4}{x_2} = 0$$

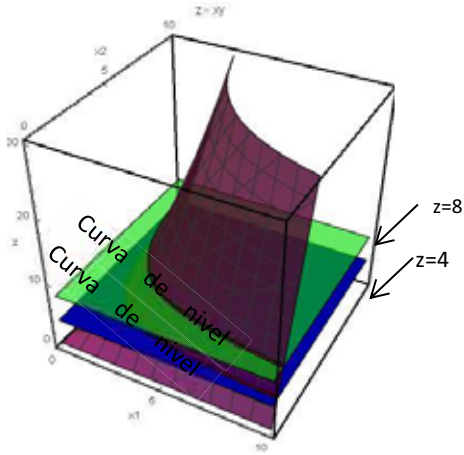
Para las siguientes curvas de nivel:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{Cte}{x_1} = 0, \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{Cte}{x_2} = 0$$

Cada una de las curvas de nivel tendrá el mismo límite.

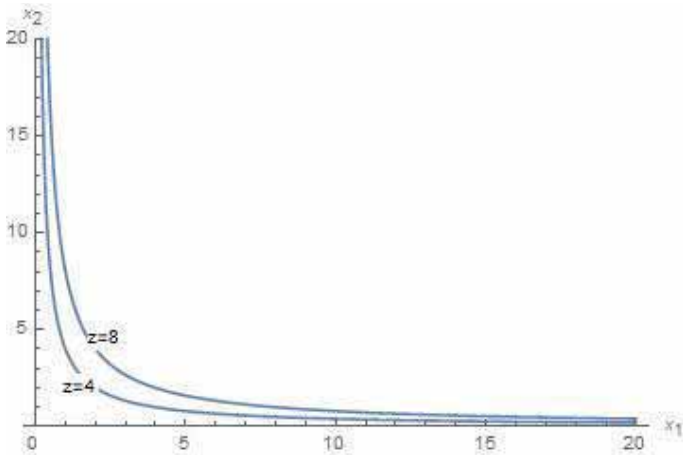
Si ahora se proyecta otro plano paralelo a x_1x_2 con altura de 8, se obtiene una nueva curva de nivel representada en la gráfica anterior, se adicionada un segundo plano $z=8$ se tiene una nueva curva de nivel definida por la ecuación $8 = x_1x_2$ (gráfica 2.18).

Gráfica 2.16:curvas de nivel



Si se proyectan ambas curvas de nivel en el plano x_1 y x_2 , y cada una de ellas corresponde a diferentes valores de z . Se observa que la curva de nivel $z=8$ se ubica a la derecha de la curva $z=4$ (gráfica 2.17).

Gráfica 2.17:Curvas de nivel

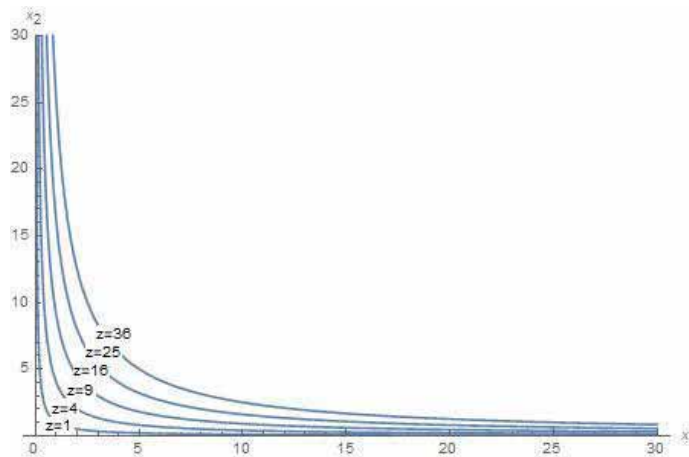


2.2.1.2 Propiedades de la curva de nivel

Monotónica

La siguiente gráfica ejemplifica más curvas de nivel con diferentes valores de z , representados por curvas sobre la superficie. Cada curva tiene una ecuación con valor de la función $z=1, 4, 9, 16, 25$ y 36 representan una familia de curvas de nivel. Se observa que z es creciente en la dirección que tanto x_1 como x_2 se incrementan (gráfica 2.18). Esta función es monotónica ya que en términos gráficos define curvas de nivel paralelas, especificada con se especifican con ecuaciones no lineales de la forma $z = x_1x_2$, se incrementan con un patrón sistemático con un crecimiento exponencial.

Gráfica 2.18: Familia de curvas de nivel



Comportamiento no lineal

La ecuación $z = x_1x_2$, define un comportamiento no lineal ya que las variables x_1 y x_2 se están multiplicando.

En esta ecuación $z = f(x_1, x_2) = x_1x_2$ se observa un incremento sistemático de z ante cambios iguales a k en x_1 y x_2 que en términos matemáticos se expresa de la siguiente forma:

$$k^2 f(x_1, x_2) = (kx_1)(kx_2)$$

Para describir cómo se comporta una ecuación no lineal, en el cuadro 2.9 se muestran cálculos que ejemplifica los cambios en z resultado de multiplicar cada una de las variables independientes (x_1 , x_2) por una constante k . En el ejemplo k varía de 1 hasta 5.

Con el propósito de simplificar los cálculos, los valores de las variables independientes se mantendrán con el valor constante igual a uno ($x_1=1, x_2=1$). Y a continuación se compara el valor inicial $z_0 = (1)(1) = 1$ para $K=1$ con los nuevos valores de z reflejan el impacto de k .

Cuadro 2.8: Comportamiento lineal

k	k x_1	K(x_2)	$z = kx_1 * kx_2$	$Z = k^2 z_0$
K=1	1	1	$z_0 = (1)(1) = 1$	$1(1)$
K=2	2	2	$(2)(2) = 4$	$(2)^2(1)$
K=3	3	3	$(3)(3) = 9$	$(3)^2(1)$
K=4	4	4	$(4)(4) = 16$	$(4)^2(1)$
K=5	5	5	$(5)(5) = 25$	$(5)^2(1)$

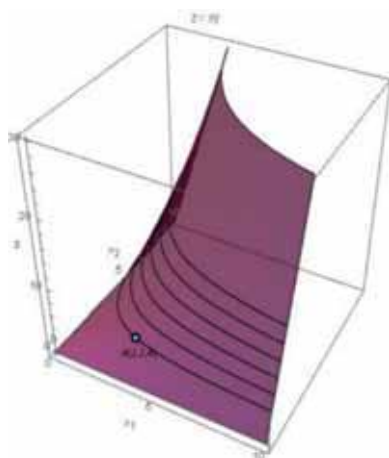
En el cuadro 2.8 se observa que cuando se duplican las variables independientes x_1 y x_2 , es decir $k=2$, z se incrementa 2^2 , el incremento en la función z se cuadriplica porque los efectos de ambas variables se multiplican $(2)(2) = 4$. Cuando los insumos se incrementan en $k=3$, z se incrementa en k^2 , es decir $z = 9$, y así sucesivamente. Finalmente se concluye: para la ecuación $z = x_1 x_2$, cuando las variables x_1 y x_2 se multiplican por la constante k es decir (kx_1, kx_2) , el producto final z se ve afectado en $k^2 z_0$. Lo que significa que la variable z se incrementa de forma exponencial.

2.2.1.3 Derivadas parciales

Como en el caso de la ecuación lineal, para la ecuación no lineal $z = x_1 x_2$, que depende de las variables x_1 y x_2 , se desea analizar la variación de la función respecto a los cambios de valores en las variables independientes.

La gráfica 2.19 muestra el punto A (2, 2, 4), punto a partir del cual supondremos que varía x_1 y se analiza su impacto en la variación de z , manteniendo fijo el valor de x_2 .

Gráfica 2.19: Punto A en el espacio



En el punto A, de la gràfica anterior se puede calcular la derivada parcial con respecto a x_1 o a x_2 se incrementa unitariamente y z se incrementa en 3 unidades.

La derivada parcial de z con respecto a x_1 cuando x_2 se mantiene constante. Esto se denota como $\frac{\partial f(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1}$, y es la derivada parcial de $f(x_1, x_2)$ con respecto a x_1 , manteniendo constante a x_2 , representado por el acento barrita sobre la variable x_2 , que se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, \bar{x}_2)}{\Delta x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{(x_1 + \Delta x_1)(\bar{x}_2) - x_1 \bar{x}_2}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \Delta x_1 - x_1 \bar{x}_2}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\bar{x}_2 \Delta x_1}{\Delta x_1} = \bar{x}_2 \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \bar{x}_2\end{aligned}$$

La derivada de $z = f(x_1, x_2)$ con respecto a x_2 cuando \bar{x}_1 corresponde a la siguiente expresion:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\bar{x}_1, x_2)}{\partial x_2} &= \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, x_2 + \Delta x_2) - f(\bar{x}_1, x_2)}{\Delta x_2} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{(\bar{x}_1)(x_2 + \Delta x_2) - \bar{x}_1 x_2}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 \Delta x_2 - \bar{x}_1 x_2}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\bar{x}_1 \Delta x_2}{\Delta x_2} = \bar{x}_1 \\ \frac{\partial f(\bar{x}_1, x_2)}{\partial x_2} &= \bar{x}_1\end{aligned}$$

La expresi3n $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ depende del valor de \bar{x}_1

Es interesante generalizar el comportamiento previo de la ecuaci3n inicial $z = x_1 x_2$, en la que los exponentes de ambas variables (α_s) son unitarios (con valor igual a 1), caso en el que el valor marginal de z se incrementa en la misma magnitud que el valor inicial de la variable fija (en este caso x_2). Reflejando una mayor capacidad de impacto en z cuando se parte de una mayor dotaci3n inicial de la variable fija m1s alta. Esta propiedad es un caso particular de una ecuaci3n no lineal.

Ejemplos:

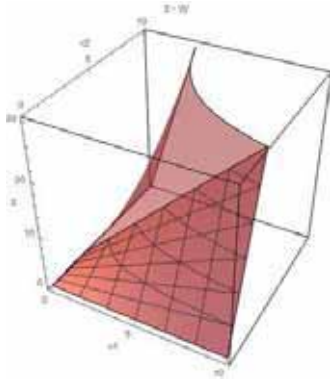
En el cuadro 2.9 se presentan c1lculos partiendo del punto **A (2, 2, 4)**, para analizar la variaci3n de z con respecto a la variable x_1 , y manteniendo fijo el valor de x_2 .

Cuadro 2.9: Incrementos de z con respecto a x_1

Punto	x_1	Δx_1	\bar{x}_2	$z=x_1x_2$	$\frac{\Delta z}{\Delta x_1} = \frac{(x_1+\Delta x_1)(\bar{x}_2) - x_1\bar{x}_2}{\Delta x_1}$
A	2	1	2	$(2)(2) = 4$	
B	3	1	2	$(3)(2) = 6$	$(2+1)(2) - (2)(2) = 6-4 = 2$
C	4	1	2	$(4)(2) = 8$	$(3+1)(2) - (3)(2) = 8-6 = 2$
D	5	1	2	$(5)(2) = 10$	$(4+1)(2) - (4)(2) = 10-8 = 2$
	creciente	constante	constante	creciente	$\Delta z = 2 = x_2$

En este ejemplo cuando la ecuación tiene constante el valor de x_2 y la variable x_1 se incrementa en una unidad el valor de z se incrementa en 2 unidades. (Gráfica 2.20)

Gráfica 2.20: Variable $x_2=2$



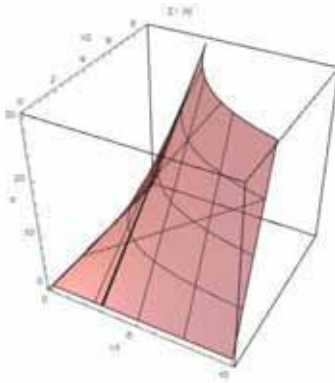
En el cuadro 2.10, ahora se analizará el caso de mantener fijo el valor de la variable x_1 y variar el valor de la variable x_2 se parte del punto G (3, 3, 9). A partir de los nuevos valores de x_2 se calcula el valor de z y a continuación su incremento.

Cuadro 2.10: Incrementos de z con respecto a x_2

Punto	\bar{x}_1	x_2	Δx_2	$z=x_1x_2$	$\frac{\Delta z}{\Delta x_2} = \frac{(\bar{x}_1)(x_2+\Delta x_2) - \bar{x}_1x_2}{\Delta x_2}$
G	3	3		$(3)(3) = 9$	
H	3	4	1	$(3)(4) = 12$	$(3)(3+1) - (3)(3) = 12-9 = 3$
I	3	5	1	$(3)(5) = 15$	$(3)(4+1) - (3)(4) = 15-12 = 3$
		Creciente	constante	Creciente	$z=x_1$

Para el caso en que el valor de la variable x_1 es fija y vale 3 unidades, incrementos unitarios en x_2 provocan un incremento en z de 3 (gráfica 2.21). Esta conclusión es la misma que pudo observar el primer y el segundo cuadro donde el cociente de $\frac{\Delta z}{\Delta x_1}$ depende del valor de \bar{x}_2 .

Gráfica 2.21: Variable $x_1=3$



En la gráfica se observa el valor de $x_1=3$ se representa la curva de nivel con una línea gruesa.

En general se puede decir que para esta ecuación z el valor marginal se incrementa en forma constante y con un valor igual al valor inicial de la variable que se considera constante en el punto desde donde se consideran los cambios.

Diferencial total

Para analizar los cambios totales en z cuando varían simultáneamente x_1 y x_2 se calcula el diferencial total de la ecuación $z=x_1x_2$ lo que se expresa de la siguiente manera:

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \delta x_2$$

Sustituyendo las ecuaciones obtenidas previamente $\frac{\partial z}{\partial x_1} = \bar{x}_2$ y $\frac{\partial(\bar{x}_1x_2)}{\partial x_2} = \bar{x}_1$ en la ecuación se tiene lo siguiente:

$$\delta z = x_2 \delta x_1 + x_1 \delta x_2$$

En particular para los ejemplos considerados arriba donde los incrementos fueron unitarios ($\delta x_1=1$, $\delta x_2=1$) se tiene lo siguiente:

$$\delta z = x_2(1) + x_1(1) = 3 + 2 = 5$$

El valor del diferencial total es igual a 5. En este caso es claro que el cambio total en z se explica en un 60% en x_1 y en 40% por x_2 dado que el valor fijo de x_1 fue 3 y el valor fijo de x_2 fue de 2.

$$\delta z = \bar{x}_2 + \bar{x}_1$$

Definiendo a la expresión **Pmg** total z

$$\text{Pmg}_{\text{total } z} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

2.2.1.4 Elasticidad de z con respecto a las variables independientes

Como se analizó en el caso lineal, la elasticidad de z con respecto a cada variable se representa por la expresión:

$$e_{x_1} = \frac{x_1}{z} \frac{\partial z}{\partial x_1}$$

En forma discreta la expresión matemática que define la elasticidad es la siguiente:

$$e_{x_1} = \frac{\Delta \% z}{\Delta \% x_1}$$

En forma particular la expresión para la ecuación $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ se ilustra a partir de los cambios porcentuales de z y x_1 . Como se describe a continuación.

El cambio porcentual de es:

$$\Delta \% z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{x_1 x_2 + \bar{x}_2 \Delta x_1 - x_1 \bar{x}_2}{x_1 \bar{x}_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1}$$

Ahora calculando la expresión del cambio porcentual de la variable x_1 ($\Delta \% x_1$).

$$\Delta \% x_1 = \frac{\Delta x_1}{x_1} (100)$$

Sustituyendo los valores previos en la expresión de la elasticidad de sustitución se obtiene:

$$e_{x_1} = \frac{\frac{\Delta x_1}{x_1} (100)}{\frac{\Delta x_1}{x_1} (100)} = 1$$

Para este caso la elasticidad es unitaria y no depende del valor fijo de x_2 ni del incremento de x_1 .

Para el caso de la variable x_2 la expresión resultante es:

$$\Delta \% z = \frac{\Delta z}{z} (100) = \frac{(\bar{x}_1)(x_2 + \Delta x_2) - \bar{x}_1 x_2}{\bar{x}_1 x_2} (100) = \frac{\Delta x_2}{x_2} (100)$$

Las variaciones z dependen únicamente del valor de x_2 .

Para la expresión del cambio porcentual de x_2 se tiene la siguiente expresión:

$$\Delta \% x_2 = \frac{\Delta x_2}{x_2} (100)$$

Para las expresiones de incremento porcentual de z y de x_2 , la elasticidad tiene la expresión:

$$e_{x_2} = \frac{\frac{\Delta x_2}{x_2} (100)}{\frac{\Delta x_2}{x_2} (100)} = 1$$

En resumen, dado que el incremento porcentual de x_2 es igual al incremento porcentual de z la elasticidad es unitaria y constante.

Ejemplos:

En el cuadro 2.11 se analizará como se incrementa porcentualmente la variable z con respecto a la variable x_1 , manteniéndose fijo el valor de $x_2 = 2$. Considerando variaciones con respecto al punto **A (2, 2, 4)** de la gráfica 2.23, donde x_2 tiene un valor fijo 2. La variable x_1 se incrementa en una unidad a partir del valor $x_2=2$.

Cuadro 2.11: Elasticidad de z con respecto a x_1

Punto	x_1	Δx_1	$\% \Delta x_1 = \frac{\Delta x_1}{x_1} (100)$	\bar{x}_2	$z = x_1 \bar{x}_2$	$\% \Delta z = \frac{\Delta z}{z} (100)$	$e_{x_1} = \frac{\Delta \% z}{\Delta \% x_1}$
A	2			2	(2)(2) =4		
B	3	1	1/2(100) =50.00	2	(3)(2) =6	2/4(100)=50	50/50=1
C	4	1	1/3(100) =33.33	2	(4)(2) =8	2/6=33.33	33.33/33.33=1
D	5	1	1/4(100) =25.00	2	(5)(2) =10	2/8(100) =25.00	25/25=1
							Unitaria

En este caso el incremento porcentual de la variable x_1 tiene el mismo valor que el incremento porcentual de la variable z . Y por lo tanto se observa que el valor de la elasticidad es unitaria y constante e independiente del valor fijo de x_2 .

En el cuadro 2.12, como en el caso anterior se analizará para valores diferentes de la variable que mantiene su valor fijo ($x_1=3$) y partiendo del punto **E (3, 3,9)**.

Cuadro 2.12: Elasticidad de z con respecto a x_2

Punto	\bar{x}_1	x_2	$\% \Delta x_2 = \frac{\Delta x_2}{x_2} (100)$	$z = \bar{x}_1 x_2$	$\% \Delta z = \frac{\Delta z}{z} (100)$	$e_{x_2} = \frac{\Delta \% z}{\Delta \% x_2}$
E	3	3	1/2(100) =50.00	(3)(3) =9	3/6(100) = 50	1
F	3	4	1/3(100) =33.33	(3)(4) =12	3/9(100) =33.33	1
G	3	5	1/4 (100) =25.00	(3)(5) =15	3/12(100) =25	1
						Unitaria

Dado que el incremento porcentual de x_2 es igual al incremento porcentual de z la elasticidad es unitaria y constante.

Esto es, para el caso de la ecuación $z=x_1x_2$ la elasticidad es unitaria sin importar si el valor que se toma como la variable fija es x_1 o x_2 . Esta propiedad de la función se refleja en los exponentes unitarios de las variables x_1 y x_2 en la función $z=x_1x_2$. Es decir, los exponentes de las variables x_1 y x_2 son elasticidades entre z y la respectiva variable.

2.2.1.5 Cambios entre las variables x_1 y x_2 sobre la misma curva de nivel

Tasa de sustitución entre las variables independientes

En este caso la *tasa de sustitución* entre variables (x_1 y x_2) de una función no lineal, es variable y gráficamente representa la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel en cada punto en el que se evalúan las variables independientes (x_1 , x_2). El signo de la pendiente es negativo, lo cual indica que por cada aumento en la variable x_1 existe una disminución en el valor de x_2 .

En la gráfica siguiente se puede ver que a medida que x_1 aumenta el valor de la pendiente disminuye, a este comportamiento se le denomina ***tasa técnica de sustitución decreciente***. Por lo que en cada punto de la función existe una pendiente diferente, a medida que x_1 aumenta y x_2 modifica su valor. El valor de la pendiente decrece.

En forma de ecuación esto es:

$$RTS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = - \frac{VM_1(x_1, \bar{x}_2)}{VM_2(\bar{x}_1, x_2)} \text{ y en su expresión matemática es:}$$

$$RTS(x_1, x_2) = - \frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{\frac{\partial z}{\partial x_2}}$$

Para el caso de la ecuación $z=x_1x_2$ las expresiones de las derivadas parciales son las siguientes:

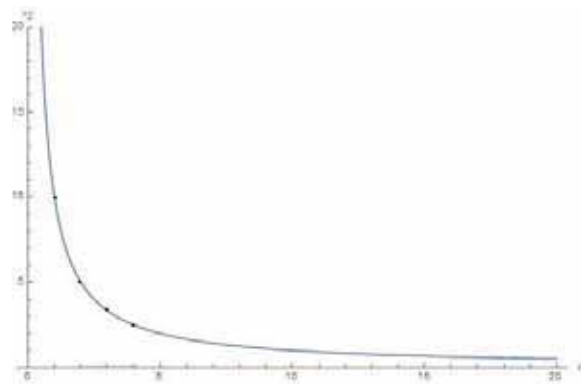
$$\frac{\partial(x_1\bar{x}_2)}{\partial x_1} = \bar{x}_2, \text{ y } \frac{\partial(\bar{x}_1x_2)}{\partial x_2} = \bar{x}_1$$

Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación de la **RTS** se tiene lo siguiente:

$$RTS = - \frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{\frac{\partial z}{\partial x_2}} = - \frac{x_2}{x_1}$$

En este caso la RTS para cada punto en la curva de nivel es igual la relación x_2 sobre x_1 . Es decir, es variable (Gráfica 2.22).

Gráfica 2.22: Curva de nivel $z=10$



A continuación, en el cuadro 2.13 analizo el caso de mantenerse en la curva de nivel $z = x_1 x_2 = 10$, partiendo del punto **(1, 10, 10)**, y adicionando una unidad a la variable x_1 , con el propósito de observar la disminución del valor de la variable x_2 para quedar en la misma curva $z=10$. Mantenerse en la misma curva de nivel implica que no existe un incremento en la variable z ($\Delta z=0$). Considerando la curva $z=10$, se trata de ver todos los puntos de ambas variables independientes (x_1, x_2) que comparten el mismo valor de $z=10$.

Cuadro 2.13: Cálculo de la RTS para diferentes puntos

x_1	Δx_1	$x_2 = \frac{10}{x_1}$	Δx_2	$RTS = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$
1		10		
2	1	5	-5	$-5/1=-5$
3	1	3.33	-1.67	$-1.67/1=-1.67$
4	1	2.5	-0.76	$-0.76/1= -0.76$
5	1	2	-0.50	$-0.50/1=-0.50$
Creciente	Constante	Decreciente	Decreciente	Decreciente

En el ejemplo es claro que, si x_1 aumenta, x_2 decrece para mantener el valor de z constante. E interesa observar la relación de sustitución de x_2 por x_1 lo cuál se denota como relación técnica de sustitución (**RTS**). En el cuadro en la cuarta columna se observa que esta relación es decreciente, es decir, a medida que se incrementa x_1 en una unidad se requiere una cantidad menor de x_2 para ser sustituido.

Elasticidad técnica de sustitución

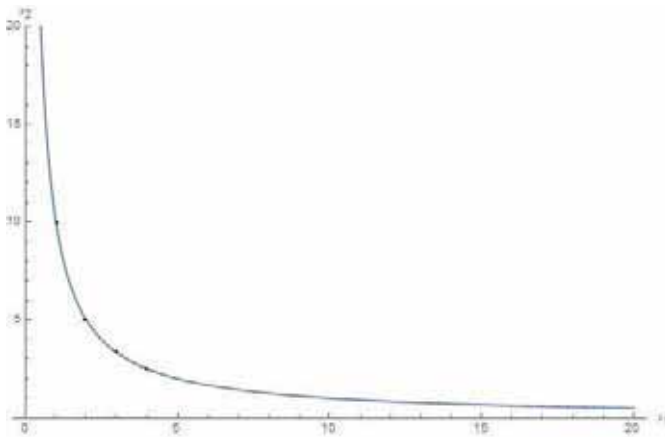
La **elasticidad técnica de sustitución** entre las variables independientes se define como los cambios porcentuales en x_1 que son sustituidos por cambios porcentuales en x_2 para mantener el nivel de z constante.

$$\sigma_s = \frac{\Delta\% \frac{x_2}{x_1}}{\Delta\% RTS}$$

La relación descrita en términos porcentuales se denomina **elasticidad técnica de sustitución**, muestra en cuanto se puede sustituir x_1 por x_2 medido en términos porcentuales.

Gráficamente la elasticidad de sustitución entre factores se comporta de la siguiente forma:

Gráfica 2.23: Curva de nivel $z=10$



A continuación, se analiza la variación porcentual del cociente de las variables y la variación porcentual de la **RTS**. En el cuadro 2.14 se muestra la elasticidad técnica de sustitución, considerando una curva de nivel $z=10$. Para realizar los cálculos se despeja a la variable x_2 . La altura z (valor de la función se considera constante).

Cuadro 2.14: Elasticidad técnica de sustitución

x_1	$x_2 = \frac{10}{x_1}$	Δx_2	$\frac{x_2}{x_1}$	$\Delta \frac{x_2}{x_1}$	$\% \frac{x_2}{x_1} = \frac{\Delta \frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1}}$	$RTS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$	ΔRTS	$\% RTS = \frac{\Delta RTS}{RTS}$	$\sigma_s = \frac{\Delta \% \frac{x_2}{x_1}}{\Delta \% RTS}$
1	10.00		10.00						
2	5.00	-5.00	2.50	-7.500	-75.00%	-5.00		-86.6	
3	3.33	-0.667	1.11	-1.389	-55.56%	-0.67	3.33	-66.67%	0.833
4	2.50	-0.833	0.62	-0.486	-43.75%	-0.83	0.83	-50.00%	0.875
5	2.00	-0.500	0.40	-0.225	-36.00%	-0.50	0.33	-40.00%	0.900
6	1.67	-0.333	0.27	-0.122	-30.56%	-0.33	0.17	-33.33%	0.917
7	1.43	-0.238	0.20	-0.074	-26.53%	-0.24	0.10	-28.57%	0.929
8	1.25	-0.179	0.15	-0.048	-23.44%	-0.18	0.06	-25.00%	0.938
9	1.11	-0.139	0.12	-0.033	-20.99%	-0.14	0.04	-22.22%	0.944
10	1.00	-0.111	0.10	-0.023	-19.00%	-0.11	0.03	-20.00%	0.950
11	0.91	-0.091	0.08	-0.017	-17.36%	-0.09	0.02	-18.18%	0.955
12	0.83	-0.076	0.06	-0.013	-15.97%	-0.08	0.02	-16.67%	0.958
13	0.77	-0.064	0.05	-0.010	-14.79%	-0.06	0.01	-15.38%	0.962
14	0.71	-0.055	0.05	-0.008	-13.78%	-0.05	0.01	-14.29%	0.964
15	0.67	-0.048	0.04	-0.007	-12.89%	-0.05	0.01	-13.33%	0.967
Creciente	Decreciente								Cte=1

Se puede demostrar que la σ_{ET} es igual a:

$$\sigma_{ET} = \frac{\% \Delta \frac{x_2}{x_1}}{\Delta \% RTS}$$

En la tabla se observa que la elasticidad de sustitución entre variables tiende a decrecer a medida que aumenta X_1 .

2.3 Modelo no lineal Cobb Douglas

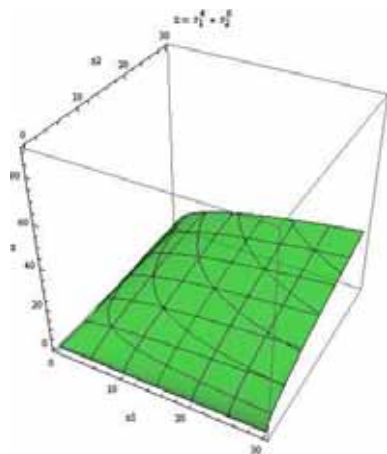
2.3.1 Cobb Douglas sin factor de escala (A)

La siguiente ecuación representa una función Cobb Douglas para el caso en que la función es de dos variables independientes (x_1, x_2) y una variable dependiente (z). Es una función no lineal porque ambas variables se multiplican, además de que la variable x_1 esta elevada al exponente α_1 y la variable x_2 a la α_2 y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

$$z = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \text{ donde } \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

La gráfica 2.24 representa la ecuación $z = f(x_1, x_2) = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$ y se ilustran las potenciales soluciones de la ecuación para valores positivos de las variables independientes x_1 y x_2 , en un espacio tridimensional que se representa por el lienzo verde que toma una forma cóncava. En la gráfica se describe como el valor de z se incrementa cuando x_1 y x_2 se incrementan.

Gráfica 2.24: de Modelo Cobb Douglas

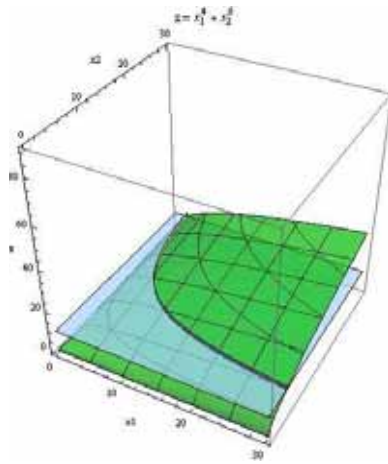


En la gráfica se puede observar en vista desde arriba (vista superior) que los valores iguales de z forman las curvas dibujadas sobre el lienzo con forma cóncava (región verde). Se observan que valores mayores de z definen curvas cóncavas más altas y que cada vez se ubican a la derecha de la recta anterior.

2.3.1.1 Representación de la variable z a través de curvas de nivel

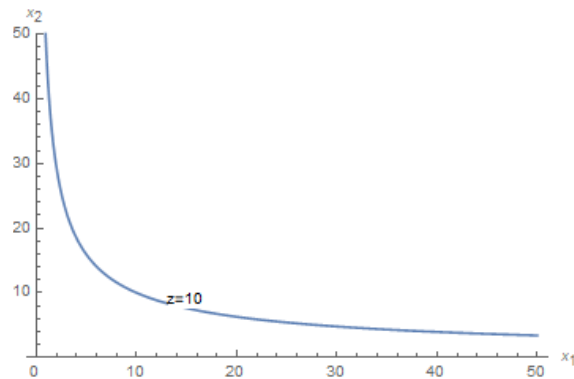
Con el propósito de analizar la variación de z , se ejemplifica con planos a una altura constante que cortan al lienzo verde. Por ejemplo, en la siguiente gráfica **2.27**, se presenta un plano azul que es paralelo al plano x_1x_2 ($z = c$), y con altura constante $z = 10$. La intersección de este plano azul con el lienzo verde genera una curva de nivel a la altura de $z = 10$, ésta curva contiene todos los puntos que solucionan a la ecuación $x_1^{0.4} x_2^{0.6} = 10$, ésta representa la ecuación de la curva de nivel con altura $z = 10$.

Gráfica 2.25 Intersección de plano $z=10$ y superficie Cobb Douglas



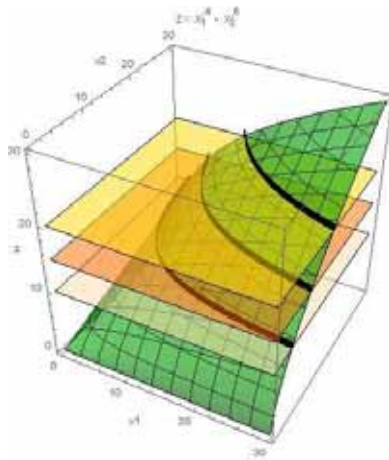
Cuando la curva de nivel $z = 10$ se proyecta en el plano de dos dimensiones se como resultado la gráfica 2.26 que muestra una curva de nivel (isocuanta) con altura de $z = 10$ y cuya ecuación es $x_1^{0.4} x_2^{0.6} = 10$.

Gráfica 2.26: Curva de nivel $z=10$



Para generar una familia de curvas de nivel se realiza el mismo procedimiento con planos que indican diferentes alturas por ejemplo $z=10,15,20$. La gráfica 2.27 muestra como al incrementarse el valor de z se incrementan los valores de x_1 y x_2 , ya que las nuevas intersecciones se producen cada vez más hacia la derecha.

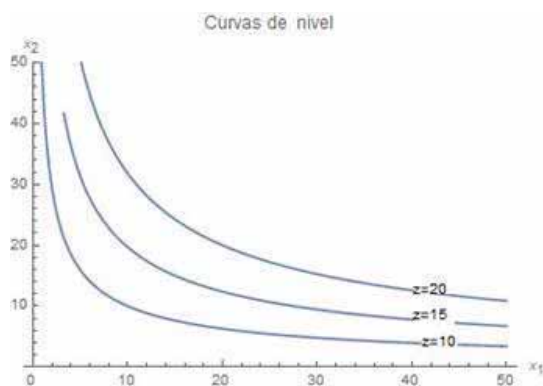
Gráfica 2.27: Curvas de nivel en el plano de tres dimensiones



En la gráfica se observa que el valor de z en las curvas de nivel tiene un comportamiento creciente en la dirección que aumentan los valores de las variables x_1 y x_2 . Este comportamiento creciente es una característica de las funciones monotónicas, y la comparte con el caso no lineal expuesto arriba.

Las curvas de nivel mencionadas se proyectan en el plano en 2 dimensiones y se representan en la gráfica 2.31:

Gráfica 2.28: Familia de curvas de nivel



2.3.1.1 Características de la curva de nivel

Monotónica y lineal

Para la ecuación $z = x^{0.4}x^{0.6}$, la propiedad monotónica explica que se comporte de la siguiente forma: si x_1 y x_2 se incrementan por k , el valor de z también se incrementa por k (resultado idéntico al caso lineal visto en el apartado propiedades lineales, caso lineal).

La variación se puede expresar de la siguiente forma:

$$(k)f(x_1, x_2) = f(kx_1, kx_2) = (kx_1)^{0.4} (kx_2)^{0.6}$$

La variación en z no es k^2 debido a que los exponentes de x_1 y x_2 reducen el impacto a sólo k , como se muestra a continuación. Y este comportamiento de la función explica que esta ecuación comparte esta propiedad como en el caso lineal.

$$(k)f(x_1, x_2) = k^{0.4+0.6} x_1^{0.4} x_2^{0.6} = (k)f(x_1, x_2) = k x_1^{0.4} x_2^{0.6}$$

En el cuadro 2.15 se muestra el resultado de realizar los incrementos a partir del punto **O (2,29.249, 10)**, punto a partir del cual se incrementan x_1 y x_2 en una constante k (k toma los valores **5, 10, 15, 30, y 45** mostradas en la fila 2). Los valores x_1 y x_2 se incrementan en k y el resultado se anota en las filas correspondientes.

Cuadro 2.15: Propiedades lineales Cobb Douglas

Punto	k	Kx_1	Kx_2	$Z=x_1^{0.4}x_2^{0.6}$	Kz_0
O	1	2	29.240	$z_0 = (2)^{0.4}(29.24)^{0.6}=10$	$(1) (10) = 10$
P	5	10	146.200	$(10)^{0.4}(146.20)^{0.6}=50$	$(5) (10) =50$
Q	10	20	292.400	$(20)^{0.4} (292.400)^{0.6}=100$	$(10) (10) =100$
R	15	30	438.600	$(30)^{0.4} (438.600)^{0.6}=150$	$(15) (10) =150$
S	30	60	877.200	$(30)^{0.4} (877.200)^{0.6}=300$	$(30) (10) =300$
T	45	90	1315.800	$(45)^{0.4} (1345.800)^{0.6}=450$	$(45) (10) =450$

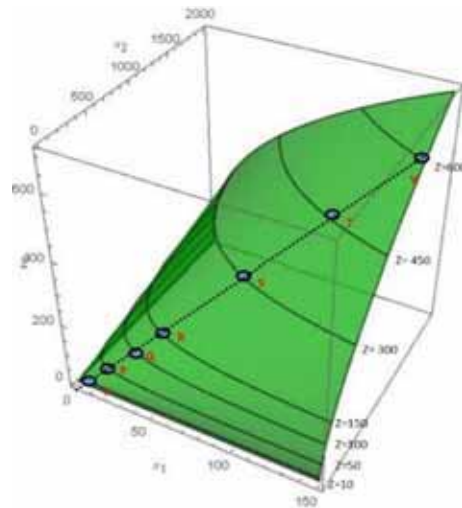
Los resultados del cuadro muestran, por ejemplo, cómo es que si x_1 y x_2 se incrementan en $k=5$, z también se incrementa en 5. Cuando x_1 y x_2 se multiplicaron por 10 veces el valor de z también se multiplicó por 10. Para los demás valores de k se observa el mismo comportamiento. Es claro que en esta ecuación z se incrementa en la misma proporción que x_1 y x_2 . Esta ecuación comparte esta propiedad como en el caso lineal, se incrementan en la misma proporción.

Este comportamiento se describe gráficamente en las curvas de nivel que forman valores diferentes de z . La curva de nivel inicial que contiene el punto **O** se observa con la altura de 10, las curvas con alturas 50, 100, 150, 300 y 600 siempre se van ubicando a la derecha de la altura previa

en forma paralela a las demás curvas de nivel, indicando la propiedad monotónica de la función (exactamente igual que la función lineal).

En la gráfica 2.29 se observa que los puntos **O**, **R**, **S**, **T** y **U** estimados en el cuadro anterior siguen una trayectoria muestra la trayectoria de expansión de **z** a medida que **x₁** y **x₂** se incrementan en el factor **k**, y sintetiza la propiedad monotónica de la función.

Gráfica 2.29: Expansión de curva de nivel



2.3.1.2 Derivadas parciales

En esta sección se analiza cómo se ve afectado el valor de **z**, cuando se mantiene fija una de las variables y se adiciona una unidad a la otra variable, entonces se Incrementó **z**.

Expresando los incrementos de **z** con respecto a **x₁**, se puede expresar en términos de derivadas parciales:

$$\frac{\partial z(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, \bar{x}_2)}{\Delta x_1}$$

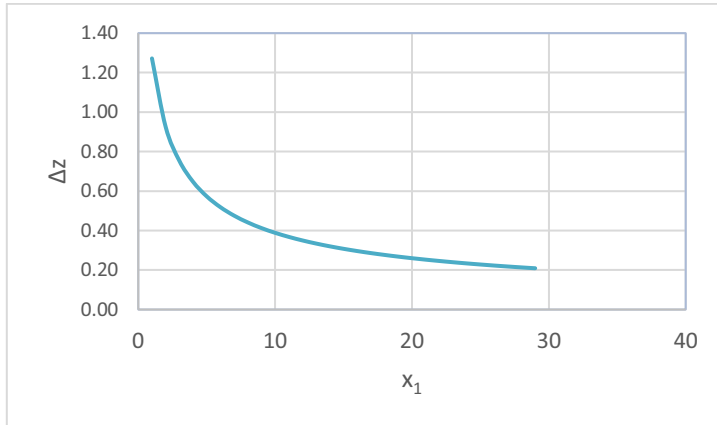
$$\frac{\partial z(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x_1} = \frac{(x_1 + \Delta x_1)^{\alpha_1} \bar{x}_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_1} \bar{x}_2^{\alpha_2}}{\Delta x_1} = \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \bar{x}_2^{\alpha_2}$$

Sustituyendo el valor de **α₁= 0.4** y **α₂= 0.6** y reordenado los términos resulta la siguiente expresión:

$$\frac{\partial z(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} = 0.4 x_1^{0.4-1} x_2^{0.6} = 0.4 x_1^{-0.6} x_2^{0.6} = 0.4 \left(\frac{x_2^{0.6}}{x_1^{0.6}} \right) = 0.4 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{0.6}$$

A partir de dicha expresión, si consideramos que x_1 tienda a infinito $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.6} = 0$, el incremento de z es cero. Lo que quiere decir que el producto marginal de x_1 cuando x_2 se mantiene fijo es decreciente y tiende a cero para valores muy grandes de x_1 (Gráfica 2.30).

Gráfica 2.30: Producto marginal decreciente



En la gráfica 2.30 se representa el producto marginal cuando x_1 se incrementa, se observa que Δz tiende a disminuir hasta ser igual a cero a medida que x_1 se incrementa. Lo que se interpreta como que el valor de z tiende a crecer más lentamente. Se observa como los cambios marginales de z disminuyen drásticamente para valores bajos de x_1 y tienden a cero a medida que x_1 registra valores altos.

Ahora expresando el producto marginal de z con respecto a x_2

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2} \frac{\bar{x}_1^{\alpha_1} (x_2 + \Delta x_2)^{\alpha_2} - \bar{x}_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}}{\Delta x_2} = \alpha_2 \bar{x}_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}$$

Sustituyendo el valor de $\alpha_1 = 0.4$ y $\alpha_2 = 0.6$ y reordenando los términos, resulta la siguiente expresión

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0.6 x_1^{0.4} x_2^{0.6-1} = 0.6 x_1^{0.4} x_2^{-0.4} = 0.6 \left(\frac{x_1^{0.4}}{x_2^{0.4}}\right) = 0.6 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0.4}$$

A partir de dicha expresión, si se considera que x_2 tiende a infinito. $\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0.4} = 0$, el incremento de z es cero. Lo que quiere decir que el producto marginal de x_2 cuando x_1 se mantiene fijo es decreciente y tiende a cero para valores muy grandes de x_2

Ejemplos:

Producto marginal de x_1

En el cuadro 2.16, los cambios se hacen a partir de un punto específico **i (2,10, 5.25)**, en el que se conservó fijo el valor de $x_2=10$, y se adicionó una unidad a x_1 en forma consecutiva. Los resultados se muestran en el siguiente cuadro:

Cuadro 2.16: Incrementos de z con respecto a x_1

Punto	x_1	Δx_1	\bar{x}_2	$z = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$	$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, \bar{x}_2)$
i	2		10	5.25	
j	3	1	10	6.18	0.93
k	4	1	10	6.93	0.75
l	5	1	10	7.58	0.65
m	6	1	10	8.15	0.57
	Creciente		constante	Creciente	Decreciente

En la tabla se observa que cuando se incrementa x_1 , z se incrementa (con x_2 fijo) confirmando la propiedad monótonica de la función

Es importante destacar que los incrementos se van reduciendo a medida que x_1 registra valores más altos, mostrando un desgaste en su incremento (cuadro previo, última columna). Este comportamiento se resume diciendo que registra un **incremento marginal decreciente**. A medida que x_1 aumenta (cuando x_1 es infinito), el incremento de z tiende a ser cero.

Producto marginal de x_2

A continuación, en cuadro 2.17, se analiza cómo se ve afectado el valor de z , cuando se mantiene fija la variable $x_1 = 2$ y se adiciona una unidad a x_2 . Los cambios se hacen a partir de un punto definido, en este caso el punto **j (3,10, 6.18)**, en el que mantengo fijo el valor de $x_1=3$ y a partir de $x_2=9$ adiciono una unidad a x_2 en forma consecutiva.

Cuadro 2.17: Incrementos en z por cambios en x_2

Punto	\bar{x}_1	x_2	Δx_2	$z = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$	$\Delta z = f(\bar{x}_1, x_2 + \Delta x_2) - f(\bar{x}_1, x_2)$
j	3	10		6.18	
n	3	11	1	6.54	0.36
o	3	12	1	6.89	0.35
p	3	13	1	7.23	0.34
q	3	14	1	7.56	0.33
		Creciente		Creciente	Decreciente

En el cuadro se describe como el valor de z se incrementa conforme se incrementa el valor de la variable x_2 (tercera columna). Sin embargo, el incremento es decreciente, con cambios muy pequeños, lo que se señala en la sexta columna. Este comportamiento confirma la propiedad monotónica de la función, ya que cuando se incrementa x_2 , z se incrementa, aunque en forma decreciente.

Diferencial total

Finalmente, como en los ejercicios anteriores, la diferencial total de la función $z = (x_1)^{0.4} (x_2)^{0.6}$ se expresa con la siguiente expresión:

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \delta x_2$$

Por ejemplo, a través de los cambios señalados en los dos cuadros previos podemos identificar que cuando nos movemos del punto inicial **i (2,10, 5.25)** al punto final **n (3, 11, 6.54)** se realiza a través de dos movimientos cuyos impactos individuales explican el cambio total en z .

Primero, realizamos un movimiento en x_1 agregando una unidad en x_1 y dejando fijo $x_2=10$. Este movimiento implica pasar del punto **i (2,10, 5.25)** al punto **(3, 10, 6.18)** que se observa en el cuadro previo. El incremento de x_1 en uno impacta a z en **0.93**.

Segundo, realizamos el movimiento pasando de **i (3,10, 6.18)** al punto **(3, 11, 6.54)** lo que se puede realizar al agregar una unidad a x_2 y dejando fija x_1 con el valor de tres. El incremento de x_2 en una unidad impacta a z en 0.36.

El incremento total en z se puede representar como la suma de los incrementos individuales y se denota de la siguiente forma:

$$\delta z = x_2 \delta x_1 + x_1 \delta x_2$$

Lo que simboliza la suma del incremento de z producido en por x_1 más el incremento de z producido por x_2 .

En términos de los datos queda de la siguiente forma:

$$\delta z = 0.93 + 0.36 = 1.29$$

La expresión anterior muestra el valor marginal total de z ante cambios en ambas variables, destacando su valor marginal de cada una de ellas.

$$Pmg_z = 0.93 + 0.36 = 1.29$$

Este cambio de ambas variables se representa de forma porcentual, de la siguiente forma:

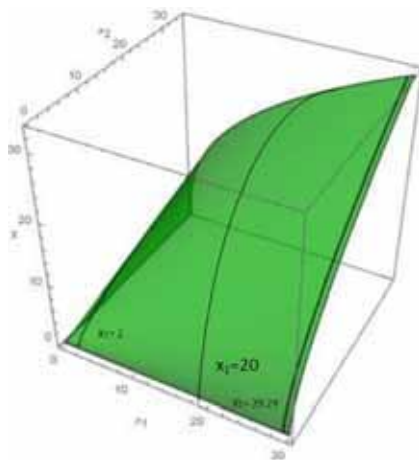
$$0.72\%x_1 + 0.28\%x_2 = 100\%$$

El resultado anterior muestra que el 100% del cambio en z se explica en un 72% por x_1 y 28% por x_2 . Lo anterior muestra que el cambio total en z se divide por cambios provocados por la variable x_1 y x_2 , y que siempre la suma de los cambios porcentuales de ambas variables será igual a cien, independientemente del valor que se considere fijo en x_1 y en x_2 .

2.3.2.3 Influencia del valor de la variable fija x_1 en el incremento de z

El impacto de la influencia mencionada se analiza comparando dos valores diferentes para el valor fijo de la variable x_1 , la cual primero se analizará con el valor 2 y luego con 20.

Gráfica 2.31: Influencia de la variable fija x_1



En la gráfica 2.31, se puede observar que cuando x_1 se mantiene fija con un valor cercano a cero y x_2 varía, el incremento de z es menor que cuando x_1 toma un valor mayor.

Para analizar el efecto producido por modificar el valor fijo de la variable x_1 , en el cuadro 2.18, se muestran 10 puntos iniciando en el punto con el valor inicial de $x_2=1$. Y se considera un incremento constante de la variable x_2 igual a uno ($\Delta x_2=1$).

Ya que el valor de la variable fija x_1 tomara dos valores diferentes (**2 y 20**), analizare el valor de la función (z) en las columnas 5 y 7. En la columna 4 se encuentran los valores que toma la función cuando la variable x_1 tiene el valor 2, y en la sexta cuando toma el valor de 20.

Cuadro 2.18: Incrementos de z con respecto a x_2

\bar{x}_1	x_2	Δx_2	$z=(2)^{0.4}(x_2)^{0.6}$	Δz	\bar{x}_1	$z=(20)^{0.4}(x_2)^{0.6}$	Δz
2	1				20	3.31	
2	2	1	2.000	0.68	20	5.02	1.71
2	3	1	2.551	0.55	20	6.41	1.38
2	4	1	3.031	0.48	20	7.61	1.21
2	5	1	3.466	0.43	20	8.71	1.09
2	6	1	3.866	0.40	20	9.71	1.01
2	7	1	4.241	0.37	20	10.65	0.94
2	8	1	4.595	0.35	20	11.54	0.89
2	9	1	4.931	0.34	20	12.39	0.85
2	10	1	5.253	0.32	20	13.20	0.81
Constante	Creciente	Constante	Creciente	Decreciente		Creciente	Decreciente

El impacto de variar el valor fijo de la variable x_1 influye en el valor de z en forma directa. Ya que al tener un valor de x_1 fijo a un mayor nivel (20) el valor de z se incrementa en niveles elevados, es decir, impacta en forma directa sobre el nivel de z . Así mismo, los aumentos unitarios de x_2 se traducen en aumentos decrecientes en z a mayor magnitud (respecto al otro valor de x_1), ya que los incrementos en los primeros valores de x_2 son mayores a uno y decrecen a medida que la variable aumenta.

Para el caso el que la variable x_1 mantiene su valor fijo en 2 el valor de z se incrementa menos y con menor velocidad, traduciéndose en incrementos con valores más pequeños y decrecientes (última columna).

En conclusión, el valor fijo de x_1 impacta en forma directa el nivel de z y por lo tanto en su producto marginal y las variaciones de x_2 se traducen en incrementos decrecientes de z . En el ejemplo $z=(x_1)^{0.4}(x_2)^{0.6}$ que x_1 es fijo y con un $\alpha_1=0.4$ se concluye que el nivel fijo de x_1 impacta en forma directa el valor de z , y su $\alpha_1=0.4$ explica se produzcan rendimientos decrecientes de z .

2.3.1.4 Elasticidad de z con respecto a cada una de las variables independientes

Elasticidad de z respecto de x_1

Una vez definidas las derivadas parciales que representan cambios absolutos en el valor de z (valor de la función), lo siguiente es calcular el cambio porcentual de z debido a cambios porcentuales en la derivada parcial de x_1 .

$$e_{x_1}(x_1, x_2, z) = \frac{\%z}{\%x_1} = \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta x_1}{x_1}} = \left(\frac{x_1}{z}\right) \left(\frac{\Delta z}{\Delta x_1}\right)$$

El valor e_{x_1} recibe el nombre de elasticidad de la función z respecto a la variable x_1 y representa el cambio porcentual de z con respecto a x_1 . El resultado obtenido da una medida que no tiene dimensiones (es un porcentaje) y es posible comparar al modelo en situaciones diversas.

La definición matemática de la elasticidad es la siguiente:

$$e_{x_1}(x_1, x_2, z) = \frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{\frac{z}{x_1}} = \frac{x_1}{z} \frac{\partial z}{\partial x_1}$$

Para el caso particular de la función $z = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$ sustituyendo el valor de los componentes de la ecuación se tiene la derivada de z con respecto a x_1 :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x_1} = 0.4 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.6}$$

Sustituyendo el valor de la derivada y de z y reacomodando las fracciones se tiene la expresión:
llega a:

$$e_{x_1} = \frac{\Delta z}{\Delta x_1} \frac{x_1}{z} = 0.4 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.6} \frac{x_1}{x_1^{0.4} x_2^{0.6}} = \frac{0.4 x_1 x_2^{0.6}}{x_1^{0.6} x_1^{0.4} x_2^{0.6}} = \frac{0.4 x_1}{x_1} = 0.4$$

Con la expresión anterior se demuestra que la elasticidad z con respecto a x_1 es igual al valor de su exponente α_1 .

Elasticidad de z respecto de x_2

Como en el ejemplo anterior la expresión de la elasticidad de z con respecto a x_2 , se puede acomodar de la siguiente forma:

$$e_{x_2} = \frac{\Delta \%z}{\Delta \%x_2} = \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta x_2}{x_2}} = \frac{\Delta z}{\Delta x_2} \frac{x_2}{z}$$

Para la función $z = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$ la derivada de z con respecto a x_2 es:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x_2} = 0.6 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{0.4}$$

Sustituyendo el valor de la derivada de z con respecto a x_2 y la expresión de z y reacomodando las fracciones se tiene la expresión:

$$e_{x_2} = \frac{\Delta z}{\Delta x_2} \frac{x_2}{z} = 0.6 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{0.4} \frac{x_2}{x_1^{0.4} x_2^{0.6}} = \frac{0.6 x_1^{0.4} x_2}{x_1^{0.4} x_2^{0.4} x_2^{0.6}} = \frac{0.6 x_2}{x_2} = 0.6$$

Comprobando el valor de la elasticidad es igual al valor de la constante α_2 .

Ejemplos

En el cuadro 2.19 se estiman los incrementos porcentuales de las variables x_1 y z , partiendo de los cambios absolutos al aumentar la variable x_1 en una unidad y manteniendo fijo el valor de la variable $x_2 = 20$. Considerando variaciones con respecto al punto I (100, 20, 38.07). Con el fin de analizar valores más altos de x_1 , considero un punto inicial de x_1 igual a 100.

En la tercera columna muestro el cálculo del incremento porcentual de x_1 , el cual es decreciente a medida que x_1 aumenta.

Cuadro 2.19: Elasticidad técnica de z con respecto a x_1

x_1	Δx_1	$\% \Delta x_1 = \frac{\Delta x_1}{x_1}$	$z = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$	Δz	$\% \Delta z = \frac{\Delta z}{z}$	$e_{x_2} = \frac{\% \Delta z}{\% \Delta x_1}$
105	1	0.095	38.823	0.148	0.0038	0.400
106	1	0.094	38.970	0.147	0.0037	0.393
107	1	0.093	39.117	0.147	0.0037	0.398
108	1	0.092	39.263	0.146	0.0037	0.402
109	1	0.091	39.408	0.145	0.0036	0.395
110	1	0.090	39.553	0.145	0.0037	0.411
Creciente		decreciente				Elasticidad constante =0.4,

En el cuadro anterior se puede ver que la elasticidad estimada entre z y x_1 tiende a ser 0.4 (se redondeó de 0.399), el valor obtenido corresponde al valor del exponente de la variable x_1 , $\alpha_1 = 0.4$.

Ahora se analiza cómo varía porcentualmente z cuando se incrementa x_2 en una unidad. Se tiene el cuadro 2.20. Iniciando en el punto **i (2,100, 20.91)**, manteniendo fijo el valor $\bar{x}_1= 2$, con un incremento constante de $\Delta x_2=1$ y se inicia con un valor de 100 en x_2 con el propósito de ubicarse en la parte con mayor curvatura de la ecuación $z = \bar{x}_1^{0.4} x_2^{0.6}$.

Cuadro 2.20 :Elasticidad de z con respecto a x_2

Punto	x_2	Δx_2	$\% \Delta x_2 = \frac{\Delta x_2}{x_2}$		$\Delta z = \bar{x}^4 (x_2 + \Delta x_2)^{0.6}$	$\% \Delta z = \frac{\Delta z}{z} (100)$	$e_{x_2} = \frac{\% \Delta z}{\% \Delta x_2}$
i	100			20.912			
J	101	1	0.010	21.038	0.126	0.006	0.600
K	102	1	0.099	21.163	0.125	0.059	0.596
L	103	1	0.098	21.287	0.124	0.058	0.591
M	104	1	0.097	21.411	0.124	0.058	0.598
N	105	1	0.096	21.534	0.123	0.057	0.594
	Creciente		Decreciente	Creciente	Decreciente	Decreciente	Constante = 0.6

Para este ejemplo se fija el valor de x_1 a un valor igual a 2, es un valor bajo y tiene una mínima influencia en el valor de z , como consecuencia de su baja influencia, el valor del cambio de z tiende a ser cero, y la variable x_2 tiene mayor influencia.

Para el caso de la elasticidad de x_2 cuando la variable fija tiene un valor igual a 2 el valor de la elasticidad es **0.6**. Para el ejercicio se tomaron valores mayores a 100 en la variable x_2 .

En la tabla se puede ver que el valor de la elasticidad $e_{x_2} = \frac{\% \Delta z}{\% \Delta x_2}$ es igual a 0.6 lo que corresponde al valor de α_2 .

2.3.1.5 Cambios entre variables x_1 y x_2 sobre la misma curva de nivel

Tasa de sustitución entre variables independientes

En este apartado se analizarán cambios de las variables (x_1 y x_2) sobre la misma curva de nivel (z). Esta relación se define como **relación técnica de sustitución (RTS)** y queda de la siguiente forma:

$$RTS(x_1, x_2) = \frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{\frac{\partial z}{\partial x_2}} = - \frac{VM_1}{VM_2}$$

La **RTS** muestra en cuánto se tiene que reducir x_2 para compensar el incremento de x_1 y mantenerse sobre la misma curva de nivel.

En términos de la ecuación de la derivada total de z , este comportamiento se expresa de la siguiente forma, z no varía por lo que se supone un incremento igual a cero:

$$\Delta z = \frac{\Delta z}{\Delta x_1} (\Delta x_1) + \frac{\Delta z}{\Delta x_2} (\Delta x_2) = 0$$

En donde las derivadas parciales de z respecto a x_1 y x_2 , se expresan en términos del valor marginal de cada variable:

$$\frac{\partial z(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, \bar{x}_2)}{\Delta x_1} = VM_1$$

$$\frac{\partial z(\bar{x}_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x_2} = \frac{f(\bar{x}_1, x_2 + \Delta x_2) - f(\bar{x}_1, x_2)}{\Delta x_2} = VM_2$$

Esta ecuación confirma que la pendiente (recta tangente a la curva) toma valores distintos en cada punto de la curva de nivel.

Las respectivas derivadas parciales definidas como el valor marginal de x_1 y x_2 (VM_1 y VM_2) se sustituyen en la ecuación de la derivada total.

$$\Delta z = VM_1 \Delta x_1 + VM_2 \Delta x_2 = 0$$

Despejando de la ecuación previa la relación $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ que es la pendiente de la curva de nivel se obtiene la siguiente igualdad:

$$VM_1 \Delta x_1 + VM_2 \Delta x_2 = 0$$

$$VM_2 \Delta x_2 = -VM_1 \Delta x_1$$

$$-\Delta x_2 / \Delta x_1 = -VM_1 / VM_2$$

La expresión obtenida, para una ecuación de la forma $z=f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ se puede expresar en términos de las elasticidades de x_1 y de x_2 .

$$RTS = -\frac{VM_1}{VM_2} = -\frac{\alpha_1 x_2}{\alpha_2 x_1}$$

Expresión que se demuestra en lo que sigue.

Es interesante sustituir el valor de los **valores marginales** (también llamado **productividades marginales**) a partir de los exponentes de las variables x_1 y x_2 , en donde se demostró que

$$VM_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0.4 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{0.6}$$

$$VM_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0.6 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{0.4}$$

De tal forma que, sustituyendo dichos valores en la ecuación $z = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$, se tiene lo siguiente:

$$RTS = \frac{VM_1}{VM_2} = \frac{0.4 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{0.6}}{0.6 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{0.4}}, \text{ si se desarrolla la expresión se tiene el siguiente resultado}$$

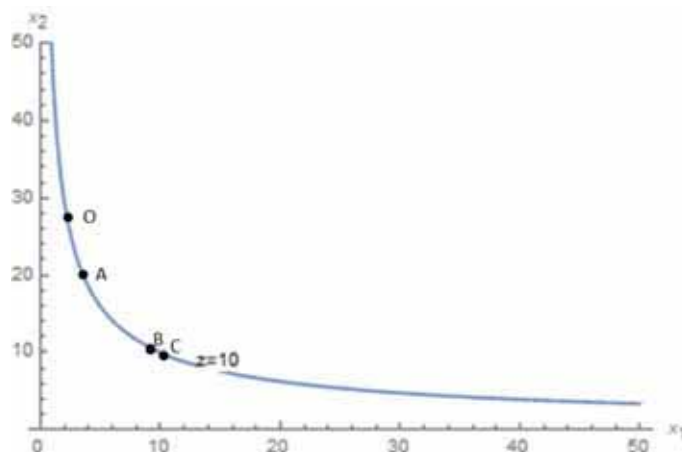
$$RST = -\frac{VM_1}{VM_2} = -\frac{0.4 \frac{x_2^{0.6}}{x_1^{0.6}}}{0.6 \frac{x_1^{0.4}}{x_2^{0.4}}} = -\frac{0.4 x_2^{0.6} x_2^{0.4}}{0.6 x_1^{0.4} x_1^{0.6}}$$

$$RST = -\frac{0.4 x_2}{0.6 x_1}$$

Ejemplo

Se suponen cambios sobre una curva de nivel específica, por ejemplo, se considera la curva con $z=10$ correspondiente a la ecuación $10=x_1^{0.4}x_2^{0.6}$ (gráfica 2.32).

Gráfica 2.32: Curva de nivel $z=10$



La gráfica 2.32 representa la curva z en la que despejando a la variable x_2 en función de x_1 se tiene:

$x_2 = \left(\frac{10}{x_1}\right)^{\frac{1}{0.6}}$ de tal forma que es claro que cuando aumenta x_1 , x_2 tiene que disminuir para mantenerse sobre la misma curva de nivel. Así mismo se observa que a medida que x_1 aumenta x_2 tiende a cero.

Los valores de x_2 que satisfacen la ecuación de la curva de nivel $z=10$ se estiman a continuación, para valores dados de x_1 a partir del punto **A**, y se presentan en el cuadro 2.21. Se observa que x_1 varía en las distintas proporciones a medida que aumenta su valor (Incremento x_1), y x_2 también varía en proporciones distintas que tienden a reducirse a medida que aumenta x_1 (RTS).

Cuadro 2.21: Cálculo de la elasticidad técnica de sustitución

Punto	Variable x_1	Incremento x_1	Variable x_2	Incremento x_2	Relación Técnica de Sustitución
	x_1	Δx_1	x_2	Δx_2	$RTS = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$
A	4		18.420		
B	6	2	14.057	-4.363	-2.181
C	9	3	10.728	-3.330	-1.110
D	10	1	10.000	-0.728	-0.728
	Creciente		Decreciente	Negativo y decreciente	Decreciente

En la columna Relación Técnica de Sustitución, se relacionan los decrementos de x_2 , respecto a los incrementos de x_1 , lo que en realidad es la pendiente de la tangente a la curva de nivel definida como **Relación Técnica de Sustitución (RTS)**, y es claro que a partir de la tabla previa que la pendiente se reduce a medida que x_1 se incrementa, además de que tiene signo negativo debido a los decrecimientos de x_2 . Estos cambios ocurren sobre la misma curva de nivel (**ya que se desea mantener el valor de la curva de nivel**) sólo reflejan ajustes en los valores de x_1 y x_2 . Por ejemplo, en el cuadro previo se observan los ajustes en x_2 , y se observa que, si x_1 aumenta en dos, x_2 se reduce inicialmente mucho (4.363) y en forma abrupta se reduce en cantidades menores, por ejemplo, en -0.728 para x_1 el cambio en x_2 igual a 10, y el decremento de x_2 llega a ser mínimo para x_1 mayores a 400 hasta llegar a cero.

Elasticidad técnica de sustitución Cobb Douglas

La variación porcentual del incremento de la relación entre las variables independientes x_2 y x_1 , en cada punto, representa el tanto por ciento del incremento de la función por cada uno por ciento que se incrementan las variables (x_1 y x_2), partiendo de un punto inicial a partir del cual se incrementa la variable x_1 y la variable x_2 ajusta su valor.

El cambio porcentual de la relación del cociente entre dichas variables:

$$\% \Delta \frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{\Delta x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1}}$$

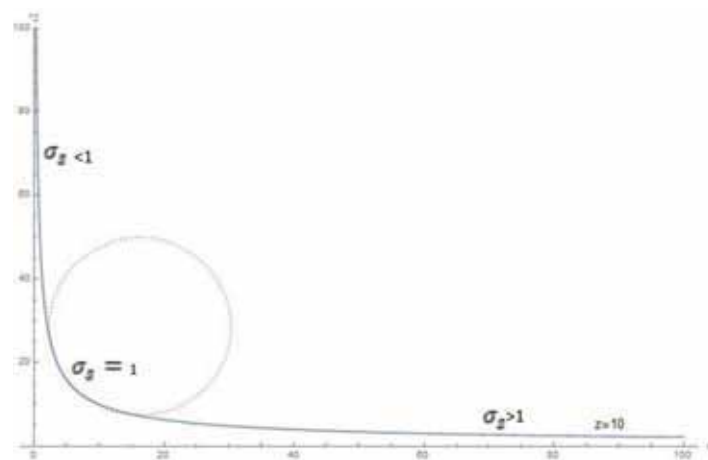
La variación porcentual de la **RTS** representa el tanto por ciento del incremento de la función por cada uno por ciento que se incrementa la variable x_1 , partiendo de un punto inicial a partir del cual se incrementa la variable x_1 y considerando la variable x_2 ajusta su valor.

El cambio porcentual de la **RTS** es:

$$\% \Delta RTS = \frac{\Delta RTS}{RTS}$$

Al cociente de las expresiones anteriores se le conoce como **Relación técnica de sustitución**.

Gráfica 2.33: Elasticidad técnica de sustitución



El valor de la **elasticidad técnica de sustitución** entre las variables x_2 y x_1 representa el valor de la curvatura de la curva de nivel. En el caso de una circunferencia, la elasticidad es unitaria en cada punto de esta. En la gráfica anterior se muestra que una curva con una convexidad perfecta (igual a la de una circunferencia) registraría una elasticidad igual a uno (George Brinton , 2006). En la figura se muestra como la curva de nivel colinda con una circunferencia en su región central, región que registra una elasticidad unitaria.

Lo anterior muestra el caso de que cuando se tiene una función no lineal que se aproxima al comportamiento de la circunferencia, su **elasticidad técnica de sustitución** será unitaria. Este es el caso de la función **Cobb Douglas** en su parte cóncava (Gráfica 2.33).

Dado que la **elasticidad técnica de sustitución** mide la variación porcentual del cociente entre los factores dividida por la variación porcentual de la **RTS**, esta variación implica cambios sobre la misma curva de nivel. Se define de la siguiente forma:

$$\sigma_{RT} = \frac{\% \Delta \frac{x_2}{x_1}}{\% \Delta RTS}$$

A continuación, en el cuadro 2.22 se muestra el cálculo de la **elasticidad técnica de sustitución** para la curva de nivel $10 = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$. Lo que se evalúa es como se incrementa la **RTS** en forma porcentual, cuando la variable $(\Delta x_1 = 1)$ se incrementa en una unidad y el valor de z se mantiene con un valor 10. Esto solo se puede lograr si el valor de x_2 se ajusta para mantenerse sobre la misma curva de nivel.

Cuadro 2.22: Elasticidad técnica de sustitución

x_1	x_2	Incremento de x_2 (Δx_2)	$\frac{x_2}{x_1}$	$\Delta \frac{x_2}{x_1}$	$\% \Delta \frac{x_2}{x_1} = \frac{\Delta \frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1}}$	$RTS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$	ΔRTS	$\% \Delta RTS = \frac{\Delta RTS}{RTS}$	$\sigma_s = \frac{\% \Delta \frac{x_2}{x_1}}{\% \Delta RTS}$
35	4.338		0.124						
36	4.257	-0.081	0.118	-0.006	4.83	-0.081			
37	4.180	-0.077	0.113	-0.005	4.23	-0.077	-0.004	4.94%	0.856
38	4.106	-0.073	0.108	-0.005	4.42	-0.073	-0.004	5.19%	0.851
39	4.036	-0.070	0.103	-0.005	4.62	-0.070	-0.003	4.11%	1.12
40	3.969	-0.067	0.099	-0.004	3.88	-0.067	-0.003	4.28%	1.03
41	3.904	-0.065	0.095	-0.004	4.04	-0.065	-0.002	3.00%	1.34
42	3.841	-0.063	0.091	-0.004	4.21	-0.063	-0.002	3.08%	1.36
43	3.782	-0.060	0.087	-0.004	4.40	-0.060	-0.003	4.76%	0.92
44	3.724	-0.058	0.084	-0.003	3.45	-0.058	-0.002	3.33%	1.03

En el cuadro se calculan los valores que toma x_2 para satisfacer la solución de la ecuación $z=10$ cuando x_1 se incrementa en una unidad, también se muestran los valores de su incremento absoluto y porcentual. Como se mantiene constante el valor de la función ($z=10$), la variable x_2 queda en función de x_1 , y se observa (columna 3) que el valor de x_2 decrece a medida que x_1 aumenta. Para estimar los cambios porcentuales se divide la variable x_2 entre x_1 (columna 5). En la columna 6 se muestran los cambios porcentuales de la relación previa, en general (sin considerar redondeo), se observa que decrecen a medida que x_1 se incrementa.

La variación de la **RTS** en términos absolutos y porcentuales (incremento de **RTS**) decrecen a medida que x_1 aumenta su valor.

Finalmente, en la tabla se registra la **elasticidad técnica de sustitución** entre las variables x_1 y x_2 (última columna), relacionando la variación porcentual de las variables entre la variación porcentual de la **RTS**. Se observa que, dado que ambas magnitudes registran valores muy similares, la relación se ubica alrededor de uno. En resumen, al ser similares dichos valores el valor de la elasticidad de sustitución de la función $z = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$ se ubica alrededor de 1. Si se realiza el ejercicio con incrementos menores de x_1 (tiende a cero), el cálculo de la elasticidad técnica de sustitución converge más rápido en uno.

Lo anterior muestra que la **elasticidad técnica de sustitución** mide la curvatura de la curva de nivel, y que una función Cobb Douglas, cuando se comporta lo más aproximado a la curvatura de un círculo registra una elasticidad de sustitución unitaria, y a contrapunto, en las regiones menos convexas la elasticidad de sustitución se aleja de la unidad (ver gráfica de elasticidad de sustitución).

2.3.2 Modelo no lineal Cobb Douglas incluyendo factor de escala (A)

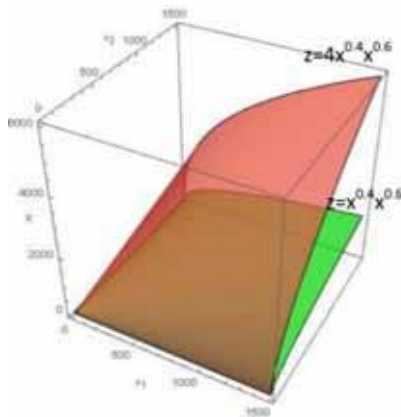
La ecuación $z = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ representa una función Cobb Douglas de dos variables independientes x_1 y x_2 y una variable dependiente z . El término **A** se denomina **factor de escala**, constante que en todo lo visto previamente, tomó un valor igual a uno. A partir de esta sección en adelante el valor de la constante **A** se ejemplifica para valores diferentes a uno y el efecto que produce “**A**” en la función z .

$$z = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \text{ donde } \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ y } A \neq 1$$

Esta función se comporta en forma similar al caso previo, con la diferencia de que el factor **A** potencia el valor de la función $z = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ en un valor equivalente a “**A**”. Esto es, si **A** = 4, el valor de $z = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ se cuadruplicará en todos sus puntos. Esto muestra que existe un impacto directo de **A** sobre z .

En la gráfica 2.34 se describe lo mencionado previamente de la siguiente forma. Los ejes x_1 y x_2 representan a las variables independientes, y el eje z a la variable dependiente. Dado que registra tres variables, la ecuación se representa en tres dimensiones. El eje x representa a la variable x_1 , el eje y a la variable x_2 , el eje z el valor de la función. En la siguiente figura se muestra el espacio vectorial de soluciones potenciales de la ecuación, para un valor de **A**=1 (en verde) y para un valor de **A**=4 (en rosa). Se observa que el lienzo rosa representa a la función $z = 4x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$, y es el más alto debido al efecto del factor de escala, en tanto que el lienzo verde tiene una altura menor y representa a la ecuación $z = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$.

Gráfica 2.34 Comparativo de curvas con y sin factor de escala



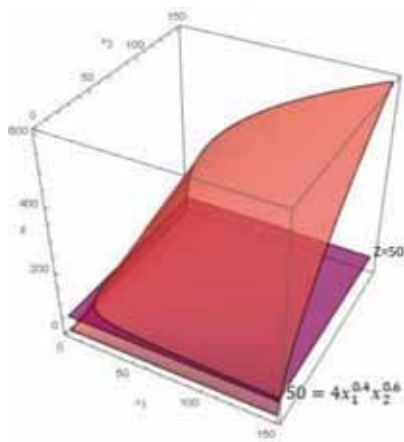
Ambos lienzos se comportan muy similares, pero en diferentes escalas, se supone valores de x_1 y x_2 mayores a cero, y se describe cómo a medida que las variables independientes (x_1 , x_2) aumentan el valor de z también aumenta.

2.3.2.1 Desplazamiento de curvas de nivel

Si ahora se comparan las curvas de nivel generadas por el plano paralelo $z = 50$ y las funciones $z = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ y $z = 4x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, en ambas curvas se genera una curva de nivel con altura **50**, sin embargo, en el caso de la curva generada en la superficie $z = 4x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ la curva se encuentra a la izquierda de la curva generada en la superficie $z = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. Cuando el valor de **A** es mayor a 1 (en este caso **A = 4**) se requieren menos unidades de las variables independientes para alcanzar la altura $z=50$.

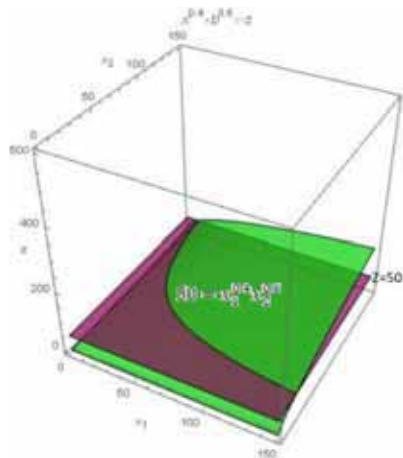
La intersección entre el plano paralelo con altura **50** y la superficie $z = 4x_1^{0.4} x_2^{0.6}$ genera la curva de nivel $50 = 4x_1^{0.4} x_2^{0.6}$.

Gráfica 2.35: Curva con factor de escala



Y para el caso de mismo plano paralelo y la ecuación $z = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$ se genera la curva de nivel $50 = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$ mostrada en la gráfica 2.36.

Gráfica 2.36: Curva de nivel sin factor de escala



El desplazamiento diferente de las curvas de nivel se puede observar de forma más clara al proyectar ambas curvas de nivel en un plano cartesiano. Por ejemplo, si se tiene las cantidades de $x_1 = 20, 30, 40, 50$. Para el caso en que $A=1$ las cantidades de x_2 que ajustan una altura $z=50$ son mayores que cuando $A=4$.

Este efecto del factor A en el valor de z se ejemplifica en el cuadro 2.24, donde se evalúan las mismas cantidades x_1 y se ajustan los valores de x_2 en las expresiones $50 = x_1^{0.4}x_2^{0.6}$ y $50 = 4x_1^{0.4}x_2^{0.6}$. Se ilustra que para el segundo caso se requiere una menor dotación de x_2 para mantener el valor de $z=50$.

En el cuadro 2.23 se muestra como el factor de escala provoca que se requiera de valores menores de x_1 y x_2 para mantener el nivel de $z=50$.

Cuadro 2.23 :comparación de factor de escala

x_1	x_2	$z = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$	x_2	$z = 4x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$
20	92.1	50	9.137	50
30	70.28	50	6.973	50
40	58.019	50	5.756	50
50	50	50	4.96	50

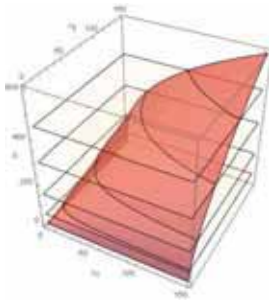
2.3.2.2 Interpretación del valor de A

Cuando $A=1$, por cada unidad adicional de las variables independientes, se incrementa en una unidad la producción, tiene un rendimiento lineal constante, descrito por la ecuación: $z = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$.

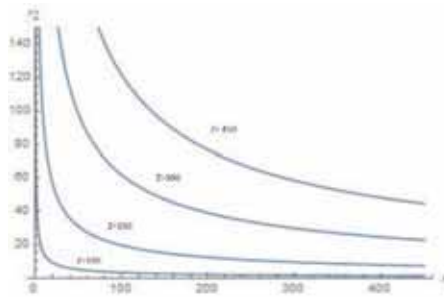
Sí $A>1$, por cada unidad que se adicione de cada variable independiente, el valor de la función se incrementará en “ A ” unidades p.e. $z = 4x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$, se tiene un rendimiento creciente.

Como en los ejemplos anteriores, si se adicionan planos paralelos a mayores alturas se puede generar una familia de curvas de nivel que se pueden proyectar en el plano cartesiano como se muestra en las gráficas 2.37 y 2.38.

Gráfica 2.37 Intersección de planos



Gráfica 2.38 Proyección de curvas de nivel



Se puede resaltar que, a mayor altura de z , las curvas de nivel se van desplazando hacia la derecha (ya que los valores de x_1 y x_2 son mayores).

Finalmente, para valores de $A < 1$ se tiene un rendimiento decreciente, por cada unidad adicional de las variables independientes se incrementa en menos de una unidad la producción.

$$z = \frac{1}{2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

2.3.2.3 Propiedad monotónica (propiedades lineales)

Esta ecuación mantiene un incremento proporcional de k veces z , cuando las variables x_1 y x_2 se incrementan en k .

La variación se puede expresar de la siguiente forma:

$$(k)f(x_1, x_2) = A(kx_1)^{0.4} (kx_2)^{0.6}$$

La variación en z no es k^2 , debido a que los exponentes de x_1 y x_2 reducen el impacto a sólo k como se muestra a continuación.

$$(K)f(x_1, x_2) = k A x_1^{0.4} x_2^{0.6}$$

Donde $A=4$.

$$(k)f(x_1, x_2) = 4k x_1^{0.4} x_2^{0.6}$$

Para esta función se conserva su incremento proporcional igual a k . El incremento es igual al de una función lineal.

2.3.2.4 Derivadas parciales

En los apartados previos (caso lineal y primer ejemplo no lineal), se demostró que z se incrementa cuando se adiciona una unidad a una variable, manteniendo fijo el valor de la otra y se obtuvo como resultado un incremento positivo y decreciente (incremento marginal decreciente).

Para el caso de la ecuación $z=f(x_1, x_2) = Ax_1^{0.4} x_2^{0.6}$, estudiada en la sección previa se tienen que cuando varía una variable y la otra se mantiene constante, el cambio marginal creciente de z se representa con derivadas parciales respecto a x_1 y x_2 ($\frac{\partial z}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial z}{\partial x_2}$).

Introduciendo el factor de escala A equivale a multiplicar el valor de la derivada parcial por el valor de la constante A

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = A\alpha_1 x_1^{\alpha_1-1} \bar{x}_2^{\alpha_2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = A\alpha_2 \bar{x}_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2-1}$$

2.3.2.5. Elasticidad de Z respecto a las variables x_1 y x_2

De manera similar a cómo se explicó en la sección de la curva Cobb Douglas sin factor de escala, la elasticidad muestra el porcentaje de cambio del valor de la función z con respecto a cada de las variables independientes.

$$e_{x_1}(x_1, x_2, z) = \frac{x_1}{z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\Delta\%z}{\Delta\%x_1}$$

Introduciendo el factor de escala en las expresiones se tienen el siguiente resultado:

$$\text{Y considerando que } e_{x_1} = \frac{\Delta\%z}{\Delta\%x_1} = \frac{\frac{A\Delta z}{z}}{\frac{A\Delta x_1}{x_1}} = \frac{A\Delta z}{A\Delta x_1} \frac{x_1}{z} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{x_1}{z}$$

Para el caso particular de la función: $z = 4x_1^{0.4} x_2^{0.6}$

Se tienen las derivadas siguientes

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{4(0.4)x_2^{0.6}}{x_1^{0.6}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{4(0.6)x_1^{0.4}}{x_2^{0.4}}$$

Sustituyendo las derivadas anteriores en la expresión de la elasticidad resultas las expresiones las siguientes:

$$e_{x_1} = \frac{\Delta\%z}{\Delta\%x_1} = \frac{\Delta z}{\Delta x_1} \frac{x_1}{z} = \left(\frac{A(0.4)x_2^{0.6}}{x_1^{0.6}} \right) \left(\frac{x_1}{Ax_1^{0.4}x_2^{0.6}} \right) = \frac{(0.4)x_1x_2^{0.6}}{x_1x_2^{0.6}} = \frac{0.4x_1}{x_1} = 0.4$$

$$e_{x_2} = \frac{\Delta\%z}{\Delta\%x_2} = \frac{\Delta z}{\Delta x_2} \frac{x_2}{z} = \left(\frac{A(0.6)x_1^{0.4}}{x_2^{0.4}} \right) \left(\frac{x_2}{Ax_1^{0.4}x_2^{0.6}} \right) = \frac{(0.6)x_1^{0.4}x_2}{x_2} = \frac{0.6x_1}{x_1} = 0.6$$

Ya que el factor **A** se encuentra tanto en el numerador como en el denominador, se elimina y no afecta en la elasticidad de z con respecto a x_1 ni tampoco la elasticidad respecto a x_2 .

Ejemplo:

Para analizar el efecto de la elasticidad de z respecto a x_1 , en el cuadro 2.24 se estima dicha elasticidad para 5 puntos a partir del punto **(10, 4.57,25)**, manteniendo fijo en valor de la variable x_2 , e incrementando en una unidad la unidad la variable x_1 y considerando el valor de **A** igual a 4. También se muestran los valores de los incrementos porcentuales de la variable x_1 (Δx_1) cuando se incrementa en 1 y su efecto en el incremento porcentual de z.

Cuadro 2.24: Incremento de z con respecto a x_1

x_1	Δx_1	$\Delta\%x_1 = \frac{\Delta x_1}{x_1}$	\bar{x}_2	$z = 4x_1^{0.4}x_2^{0.6}$	$\frac{\Delta z}{\Delta x_1}$	$\Delta\%z = \frac{\Delta z}{z}$	$e_{x_1} = \frac{\Delta\%z}{\Delta\%x_1}$
10		11.11%	4.57	25.00		3.81%	
11	1	10.00%	4.57	25.97	0.97	3.89%	0.39
12	1	9.09%	4.57	26.89	0.92	3.54%	0.39
13	1	8.33%	4.57	27.77	0.87	3.25%	0.39
14	1	7.69%	4.57	28.60	0.84	3.01%	0.39
Creciente	Constante	Decreciente	Constante	Creciente	Decreciente	Decreciente	Constante 0.4

Demostrado que la elasticidad con respecto a la variable x_1 tiene el valor de su exponente α_1 . El ejercicio anterior se puede realizar la misma manera para la variable x_2 .

2.3.2.6 Cambios entre variables x_1 y x_2 sobre la misma curva de nivel

Tasa de sustitución: cambio sobre la misma curva de nivel caso no lineal.

Como se mencionó anteriormente el efecto que produce el factor **A** en cada una de las derivadas parciales es multiplicar cada una de ellas por la constante **A**.

Sin embargo, este efecto no se ve reflejado en el cálculo de la **RTS** ya que el factor **A** se encuentra tanto en el numerador como en el denominador de la expresión **RTS** y se nulifica, quedando dicha expresión en términos de las variables independientes (x_1, x_2) y de los exponentes (α_1, α_2).

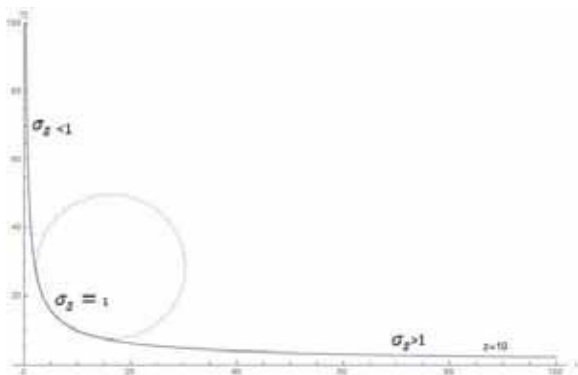
$$RTS = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{\frac{\partial z}{\partial x_2}} = -\frac{VMx_1}{VMx_2} = -\frac{A\frac{\alpha_1}{x_1}}{A\frac{\alpha_2}{x_2}} = -\frac{\alpha_1 x_2}{\alpha_2 x_1}$$

Elasticidad técnica de sustitución

Al tratarse de una curva de nivel esta presenta curvatura, y la cual se puede calcular a partir de la siguiente expresión: $\sigma_{ET} = \frac{\% \Delta \frac{x_2}{x_1}}{\% \Delta RTS}$.

Se analiza cómo varía el cociente entre los valores de la variable x_1 y x_2 cuando varía la pendiente de la curva de nivel (Gráfica 2.39).

Gráfica 2.39: Isocuanta $z=10$



A continuación, en el cuadro 2.25, se muestra el cálculo de la **elasticidad técnica de sustitución** para la curva de nivel $10 = 4 x_1^{0.4} x_2^{0.6}$. Como se desea mantener constante el valor de la función, la variable x_2 queda en función de x_1 , la cual se incrementará en una unidad, y el valor de x_2 se

ajustará y se indica el decrecimiento en la columna 4, a continuación, se muestra el cálculo del cociente entre las variables x_2 y x_1 para 6 puntos de la curva de nivel mencionada.

Es importante resaltar que a medida que x_1 aumenta su valor, el incremento de **RTS** es decreciente, así como su variación porcentual. El punto inicial es **(10, 1,10)**.

Cuadro 2.25: Elasticidad técnica de sustitución

x_1	$x_2 = \sqrt[0.6]{\frac{10}{4x_1^{0.4}}}$	Δx_2	$\frac{x_2}{x_1}$	$\Delta \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$	$\% \Delta \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = \frac{\Delta \left(\frac{x_2}{x_1} \right)}{\frac{x_2}{x_1}}$	$RTS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$	ΔRTS	$\% \Delta RTS = \frac{\Delta RTS}{RTS}$	$\sigma_s = \frac{\% \Delta \frac{x_2}{x_1}}{\% \Delta RTS}$
10	0.99								
11	0.93	-0.06	0.08	-0.01	-14.69%	-0.06	0.01	-15.40%	0.95
12	0.88	-0.05	0.07	-0.01	-13.50%	-0.05	0.01	-14.09%	0.96
13	0.83	-0.05	0.06	-0.01	-12.49%	-0.05	0.01	-12.99%	0.96
14	0.79	-0.04	0.06	-0.01	-11.62%	-0.04	0.01	-12.05%	0.96
15	0.76	-0.04	0.05	-0.01	-10.86%	-0.04	0.00	-11.24%	0.97
					Decreciente			Decreciente	Unitaria

Como se observa en la tabla, los valores seleccionados de x_1 se localizan en la región que se encuentra en la orilla de la curva de nivel, donde el valor de la elasticidad es menor a 1, sin embargo, el valor que va tomando la elasticidad converge a uno.

Al ser un caso particular de la función Cobb Douglas el valor de su elasticidad es constante e igual a uno.

Conclusiones capítulo 2

Una ecuación lineal define un espacio de soluciones potenciales que se ubican en un plano en tercera dimensión. Este plano genera curvas de nivel que son líneas rectas que se desplazan a la derecha a medida que aumenta el valor de la variable dependiente z , explicado por el incremento de las variables independientes. Este comportamiento de la función es conveniente para simular el proceso tecnológico del proceso de producción de una industria.

La **propiedad monotónica** de la función lineal permite crear un modelo que simula una situación en la que la variable z (que puede ser la producción) se incrementa en k , cuando las variables independientes se incrementan en k , lo cual es razonable para una situación real de un proceso productivo. Esto define un crecimiento lineal de la variable z .

Sin embargo, el modelo enfrenta algunas limitaciones. Por ejemplo, cuando se considera una variable fija y la otra se incrementa, el valor de z se incrementa en una proporción fija igual al valor de la variable x_2 (**rendimiento constante**) lo cual no refleja el comportamiento de la mayoría de los

procesos productivos, ya que lo que lo más frecuente es ver un desgaste en el crecimiento de la producción lo que requiere de rendimientos decrecientes. Además, el incremento constante de z no se encuentra afectado por el valor que registra el valor fijo de la otra variable. Estas propiedades de la función han llevado a argumentar que no sea recomendable para modelar la producción.

La elasticidad entre z y cada variable independiente (x_1 y x_2) es variable para cada punto de las potenciales soluciones en una misma curva de nivel, lo que impide realizar comparaciones entre situaciones diferentes y no es recomendable para simular la producción. La elasticidad puede ubicarse entre cero y uno como se demostró en el capítulo.

La **relación técnica de sustitución** (RTS) entre x_1 y x_2 es constante sobre toda la curva de nivel que adopta la forma de una línea, lo cual no es una situación realista, ya que lo más probable es que en los procesos de producción existan límites en dicha sustitución. Esto explica que al calcular la elasticidad de la **RTS** reporte un valor igual a infinito, mostrando la altísima capacidad de sustitución entre variables en esta función. Esta propiedad no aboga para modelar una situación real.

Un modelo no lineal tipo **Cobb Douglas** supera ciertos problemas de la función lineal para adecuarse a una situación adecuada para los procesos productivos.

El espacio de soluciones de la función Cobb Douglas define una hipérbola cóncava ubicada en el espacio tridimensional, lo que explica que se produzcan curvas de nivel estrictamente convexas.

El modelo Cobb Douglas genera curvas de nivel que definen **funciones monotónicas** de primer orden, lo que explica que cuando las variables independientes se incrementan en k , la variable independiente z se incremente exactamente en k . Esto es, se comporta exactamente igual al modelo lineal lo cual habla de la bondad de este modelo.

A diferencia de la función lineal, en el caso de que se suponga una variable fija y la otra varié, los incrementos en z decrecen a medida que se incrementa la variable independiente, lo cual muestra un comportamiento de productividad decreciente de la variable que se incrementa que resulta más realista en los procesos productivos.

Además, la elasticidad entre la variable dependiente z y una variable independiente es constante en cualquier punto de la función, lo que permite comparar su comportamiento con otros procesos y resulta conveniente para modelar los procesos tecnológicos. El exponente de las variables independientes denota la elasticidad de la variable respecto a z .

Debido a la forma convexa de las isocuantas, la **RTS** entre variables es diferente en cada punto de una misma curva de nivel, lo que resulta realista en un proceso tecnológico. La elasticidad de sustitución de la **RTS** es igual a uno en la región de mayor curvatura de la función, lo que muestra la perfecta sustitución entre las variables independientes. Este comportamiento capta aspectos tecnológicos interesantes de los procesos productivos.

La constante **A** en la función Cobb Douglas permite captar la tecnología que registran los procesos productivos, ya que cuando **A>1** simula rendimientos crecientes, cuando **A=1** rendimientos constantes y **A<1** rendimientos decrecientes.

La función Cobb Douglas se representa un caso más realista al considerar todas y cada una de las variables independientes debe ser mayor o igual a uno para que la variable independiente sea positiva. Es decir, se requiere al menos una unidad de cada uno de los factores de la producción. Y presenta un valor marginal variable y decreciente (definido por cada una de las derivadas parciales evaluadas en cada punto), lo que hace posible analizar el comportamiento del proceso de producción en diferentes puntos o etapas. Otra ventaja importante de la función Cobb Douglas es que puede transformarse en una función lineal, lo que permite la estimación de la ecuación.

Por lo dicho, en el siguiente capítulo se estima un modelo no lineal, que es la función Cobb Douglas con alfas que suman la unidad.

Capítulo 3 : Modelo matemático de la Industria del papel en la Cuenca del Valle de México (CVM)




En este apartado se describe la forma de representar el proceso de producción del papel en un diagrama denominado “diagrama de flujo”, donde se presentan las cuatro etapas del proceso de producción del papel: preparación de materias primas, formación de pasta de celulosa, blanqueado de pasta de celulosa y formación de hojas de papel. Este diagrama es la base para su representación mediante ecuaciones.

Diagrama de flujo para representar un proceso de producción

En términos simples, la producción del papel consiste en la creación de una pasta de celulosa formada a base de astillas de madera que posteriormente recibirá un tratamiento para blanquearla y finalmente debe extenderse usando métodos diversos para formar las hojas de papel.

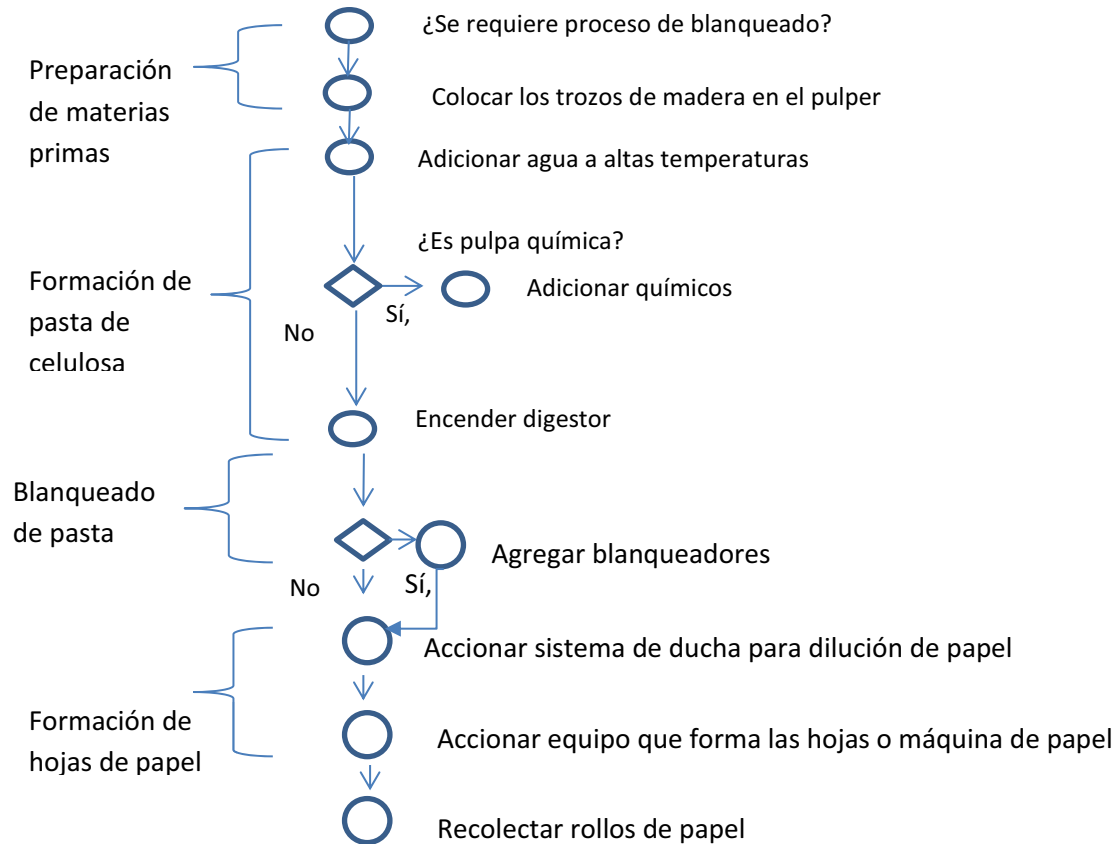
Para representar un proceso de producción industrial se utilizan los diagramas de flujo o de proceso. Para formar dicho diagrama se utilizan los símbolos mostrados el cuadro 3.1:

Cuadro 3.1: Símbolos

Símbolo	Significado
	Operación
	Decisión
	Clasificación de las etapas del proceso de producción.

El proceso de producción se puede describir en un diagrama de flujo, que permite apreciar los insumos que se deben adicionar en cada etapa de producción.

Figura 3.1: Diagrama de flujo de producción de papel



La Ingeniería Industrial y la economía, analiza los procesos industriales con el propósito de optimizar la producción o para maximizar el aprovechamiento de los recursos, y los diagramas de flujo permiten identificar las etapas en las que se puede dividir el proceso de producción, así como las variables que intervienen.

La Ingeniería industrial modela los procesos a través de la programación lineal. Para esto se basa en una función lineal objetivo tipo Leontief, variables de decisión, y restricciones definidas por igualdades y desigualdades. Para el planteamiento del problema, resulta de mucha utilidad el diagrama de flujo en la programación lineal.

A continuación, se describe la aplicación del diagrama de flujo para plantear una función de producción. En el diagrama del proceso de flujo anterior se describe la producción de papel, se puede observar que en términos generales el proceso de producción de papel requiere los diversos insumos como son: madera, agua, equipo para poder moler las astillas y elevar la temperatura del agua, químicos y trabajadores que realicen las acciones requeridas en el proceso. Los cuales son insumos que para efecto de simplificación se clasifican en 4 grupos denominados **factores de la producción**: Capital(**K**), Trabajadores(**L**), materias primas y materiales (**M**) y agua (**W**).

Una vez identificadas las cuatro variables de las que depende la producción, se define la variable dependiente y las variables independientes. Para el caso particular del proceso de producción del papel, la variable dependiente es la producción del papel (**Q**) y los insumos o factores forman el vector de variables independientes: **M, K, L, W**.

A continuación, se puede plantear una función y un sistema de ecuaciones, lo que permite utilizar la programación lineal como herramienta de optimización.

La función planteada es conocida como función de producción y se representa con la siguiente ecuación, utilizada como la función objetivo.

$$Q=f(M, L, W, K)$$

A partir del diagrama de flujo se puede plantear una ecuación lineal tipo Leontief donde la producción de papel es el resultado de la suma de todos los insumos utilizados:

$$Q= \alpha_1M+ \alpha_2L+ \alpha_3W+ \alpha_4K$$

Donde **Q** es el producto final (variable dependiente), las variables independientes, **M, L, W, K** representa a los insumos utilizados en el proceso de producción, y las α_s representan los coeficientes de las variables independientes. Los α_s en esta función representan proporciones fijas y constantes de insumos por unidad de producto.

Definida la función en un determinado problema, las variables de decisión y las restricciones, se tiene los elementos necesarios para plantear un problema de optimización de la siguiente forma:

El objetivo (la meta) que se desea optimizar (p.a., maximizar beneficios, la cantidad producida), o bien si el objetivo es minimizar (p.a., minimizar costos, desperdicios, tiempo o consumo de recursos), se especifica mediante una función objetivo que se representa como variable **Q** que está en una función de todas las variables utilizadas para llevar a cabo el proceso de producción. En cualquier problema de programación lineal, la función que se desea maximizar o minimizar recibe el nombre de función objetivo en este caso la producción.

$$Q=f(M, L, W, K)$$

$$Q= \alpha_1M+ \alpha_2L+ \alpha_3W+ \alpha_4K$$

Las variables de la decisión que podemos determinar pueden ser las cantidades de insumos utilizados (**M, L, W, K**).

Las variables deben describir por completo a las decisiones que se deben de tomar en cada una de las diferentes actividades o etapas de la producción, las decisiones se definen por medio de restricciones donde la solución debe satisfacer el logro del objetivo planteado, por ejemplo, el caso más común es cuando se enfrenta una situación de recursos limitados (escasez de agua, trabajadores especializados etc.). Una restricción de este tipo se puede expresar mediante una o varias igualdades o desigualdades lineales. Para indicar las restricciones se utiliza la expresión sujeto a (s. a), que quiere decir que la función $Q=f(M, L, W, K)$ está sujeto a determinadas restricciones.

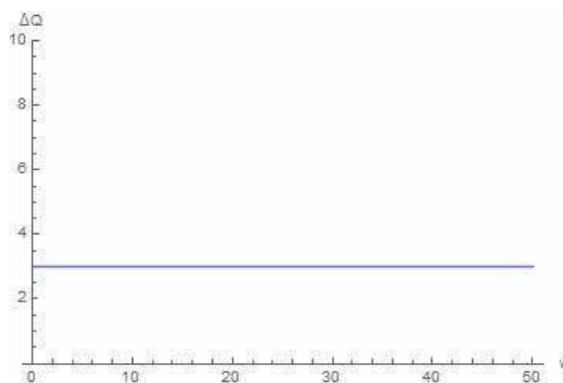
Cabe mencionar que este ejemplo describe como plantear un problema de programación lineal y no busca plantear un máximo o mínimo de producción óptimo, sino mostrar el camino que se sigue para identificar las variables independientes y la variable dependiente para el proceso de producción del papel. Así como mostrar una posible solución al problema de modelar el proceso de producción a través de una función lineal tipo Leontief.

En lo que sigue se presenta el caso de modelar la producción a través de una ecuación lineal que define un espacio de soluciones posibles en un plano, con una forma de ecuación $Q = aX_1 + bX_2$. Este es el caso presentado en el capítulo 2.

Para el caso comentado, modelar la producción a través de un modelo lineal presenta las siguientes limitaciones:

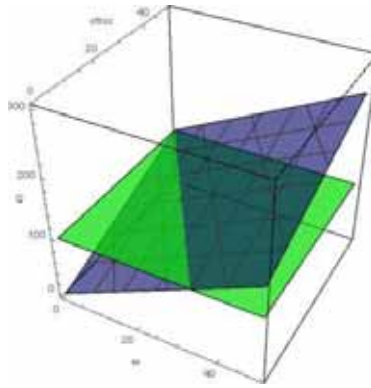
- El valor de la función de producción (**Q**) registra una pendiente constante en todos sus puntos para cada variable, limitando el análisis del proceso de producción para diferentes puntos. Considerar su pendiente constante no permite comparar cambios considerables en la producción. Al ser una recta, la derivada correspondiente es una constante. Esto se conoce como **producto marginal constante**.

Gráfica 3.1: Producto marginal constante



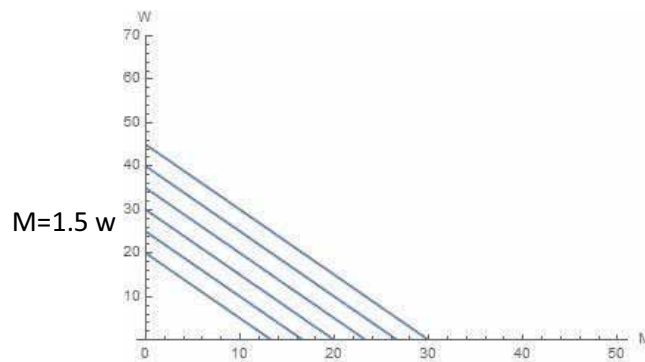
- La producción presenta rendimientos constantes lo que es un comportamiento poco realista, en el sentido de que las tecnologías de producción son más flexibles, es decir, los coeficientes no necesariamente son fijos. El incremento de los insumos en una misma proporción aumenta el producto en la misma proporción.

Gráfica 3.2: Rendimiento constantes



- La elasticidad de la producción con respecto de cada variable independiente del modelo es variable para cada punto (p.a. el caso visto en capítulo 2: $e_{x_1} = \frac{\Delta\%z}{\Delta\%x_1} = \frac{3x_1}{3x_1+2x_2}$). Dicha variabilidad hace difícil comparar la elasticidad del modelo estimado con otros modelos, debido a que para comparar la elasticidad de un modelo lineal es necesario elegir un punto en específico, limitando el análisis a una determinada región del plano. La evaluación de forma puntual (muy específica).
- La proporción entre factores de la producción es fija y la proporción de sustitución está definida por la pendiente de la recta de nivel (nivel de la producción).

Gráfica 3.3: Rectas de nivel



Considerando las limitaciones que posee la representación de la producción de papel por medio de un modelo lineal, se eligió un modelo no lineal para realizar la estimación de la función. Específicamente el modelo a estimar es el visto en el capítulo previo y es el modelo Cobb Douglas.

En lo que sigue se describe el modelo seleccionado para plantear el modelo matemático de la producción de papel en la Cuenca del Valle de México.

Características del Modelo Cobb Douglas

Así como la ingeniería industrial se apoya en la programación lineal para analizar un proceso de producción utilizando funciones lineales tipo Leontief, otra forma de analizar la producción utilizando el mismo diagrama del proceso, es por medio de funciones no lineales. En ésta última ecuación, las variables independientes representan a los insumos a los que se les conoce como factores de producción, (**M, K, L, W**), y la variable dependiente representa a la producción **Q**.

Las características de esta función de producción explican que el modelo seleccionado para su estimación del modelo matemático de la Industria del papel en la Cuenca del Valle de México se basa en un modelo no lineal Cobb Douglas con factor de escala. La estimación de la función reportará características del sector investigado.

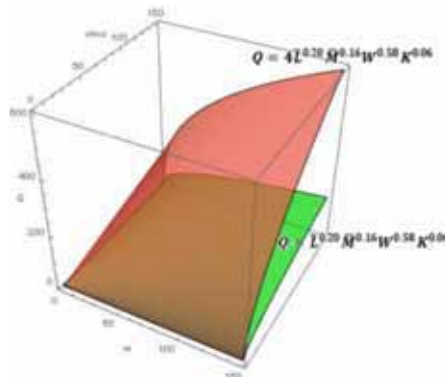
$$Q = AM^{\alpha_M}L^{\alpha_L}W^{\alpha_W}K^{\alpha_K}$$

Donde $\alpha_M + \alpha_L + \alpha_W + \alpha_K = 1$ y $A > 0$

Las α_s suman uno y representan las elasticidades de **Q** con respecto de cada variable independiente y **A** es el factor de escala. Las propiedades y supuestos de esta ecuación que modelan aspectos tecnológicos de la producción son las siguientes:

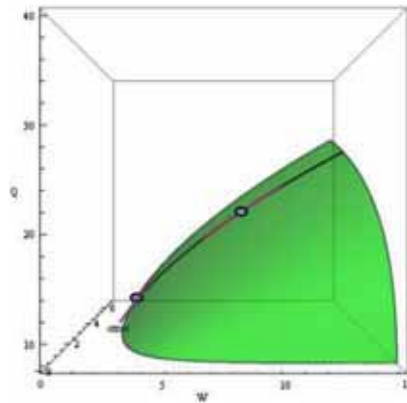
- Representa un caso realista al considerar que todas y cada una de las variables independientes deben ser positivas para que la variable dependiente sea positiva.
- La constante **A** representa el factor de escala que permite dar una interpretación de las condiciones tecnológicas del proceso que se está representando matemáticamente. Se pueden representar procesos de producciones eficientes por medio de un factor de escala $A > 1$, un proceso tecnológico menos eficiente cuando el factor de escala $A < 1$, o rendimientos constantes con $A = 1$. En la gráfica 3.4 se representa el caso cuando $A = 4$ y $A = 1$.

Gráfica 3.4: Factor de escala



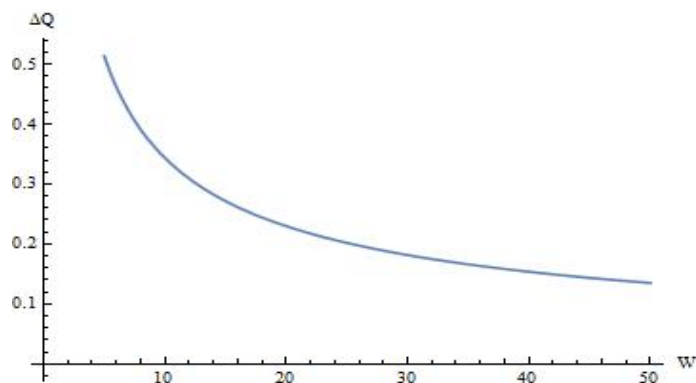
- Presenta un valor del producto marginal variable y decreciente (definido por la pendiente de cada una de las derivadas parciales evaluadas en cada punto) lo que posibilita conocer el comportamiento del proceso de producción para un determinado punto y variable independiente.

Gráfica 3.5: Incremento marginal decreciente



- El producto marginal de cada uno de los factores (variables independientes) es decreciente. Esto es, cuando se mantienen constantes los otros insumos y únicamente se incrementa el factor del que depende el valor marginal, se observa que el incremento en la producción (valor de la función) es decreciente. En la gráfica 3.6, si el producto marginal se calcula con respecto al factor agua, éste decrece hasta llegar a un punto en el que producción se considere prácticamente constante.

Gráfica 3.6: Incremento de Q cuando W aumenta



- Las elasticidades de los factores son las alfas respectivas (α_s) y representan las variaciones porcentuales de la producción (variable dependiente) con respecto a cada variable independiente. En este modelo se considera que la *elasticidad* de la producción con respecto a cada variable es constante (en un gran intervalo de la superficie) lo que permite comparar comportamientos de funciones diferentes, en contraste con la elasticidad en el caso lineal que es variable en cada punto.
- Supone grado de sustitución variable entre factores de la producción lo que es real hasta cierto grado. Esto es una ventaja respecto a la función lineal que supone infinita sustitución entre factores.
- La función Cobb Douglas puede transformarse fácilmente en una función lineal.

Estimación del modelo matemático de la función de producción de papel en la Cuenca del Valle de México

Datos de la producción de papel

El estudio se realizó para la zona denominada **Cuenca del Valle de México** conformada por la Ciudad de México, parte del Estado de México e Hidalgo. La industria del Papel tiene presencia principalmente en la Ciudad de México y en el Estado de México y una mínima cantidad en Hidalgo. En total son 95 municipios en la CVM.

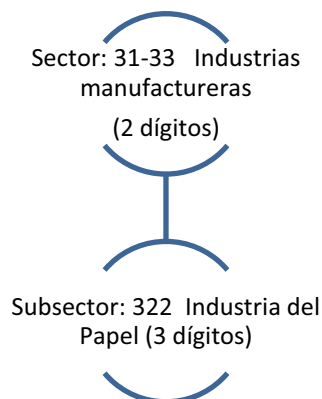
La identificación de las empresas productoras de papel en la CVM requirió de consulta de 2 fuentes de información del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI). Primero se investigó la presencia de todo tipo de establecimientos en la CVM y en segundo lugar se identificó con precisión a los establecimientos de la Industria de Papel. La investigación inició con la consulta del Directorio Estadístico Nacional de Unidades Económicas (DENUE, INEGI) en el que se ofrecen los datos de identificación, ubicación, actividad económica y tamaño de los negocios activos en el territorio nacional.

El DENUE clasifica a las unidades económicas de acuerdo con el Sistema de Clasificación Industrial de América del Norte (SCIAN), que es una clasificación adoptada por los países de América del Norte. El SCIAN fue desarrollado por Statistics (Canadá), el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI, México) y el Economic Classification Policy Committee (ECPC, Estados Unidos), para permitir la comparabilidad entre las estadísticas económicas de los tres países y da una respuesta a la necesidad de contar con un instrumento para recopilar, analizar y difundir información estadística económica lo que permite evaluar y comparar, de manera más precisa, las economías de la región (INEGI, 2018).

En segundo lugar, para identificar a los establecimientos productores de papel se realizaron las siguientes consultas. Siguiendo la tradición de la clasificación del SCIAN en actividades primarias,

secundarias y terciarias. Las actividades secundarias corresponden a las actividades manufactureras y se clasifican con el número 3 (un dígito), se clasifican en sectores con 2 dígitos (31- 33). Cada sector se divide en subsectores. Ver clasificación en la figura 3.2:

Figura 3.2: Descripción de la actividad manufacturera (3)



Esto es, la actividad económica que interesa investigar se refiere a los establecimientos que producen papel y cartón clasificada como subsector **322** (en adelante nos referimos a este grupo de establecimientos como Industria de Papel).

Una vez que se identificaron las Unidades Económicas de la Industria de Papel de acuerdo con el DENU, dicha información se comparó con información del Censo Económico (INEGI) con el objetivo de comprobar la compatibilidad de ambas bases de datos. Dado que se observó compatibilidad, se procedió a formar la base de datos requerida para la estimación del modelo. Se revisaron los censos económicos del 2014 y del 2009 para formar la base de datos requerida y que registran información anual de las variables del modelo para los años 2013 y 2008 respectivamente.

La información referente a la Industria de Papel fue consultada a nivel municipal (como una suma del total de los establecimientos de cada municipio) para cada uno de los municipios de la Cuenca del Valle de México. La consulta de los censos solo reporta información a nivel municipal ya que, de acuerdo con la ley de Acceso a la Información Pública y Protección de Datos Personales, no proporciona información de cada establecimiento (INEGI, 2008).

La información correspondiente al Censo Económico 2009, utilizado para estimar el modelo matemático registra información del año 2008. La base de datos fue formada con la información de 427 unidades económicas productoras de papel en la CVM y agregada a 34 municipios.

La base de datos presentada en forma resumida reporta lo siguiente y son datos que corresponden al año 2008:

Cuadro 3.2: Resumen de datos del censo económico 2009
(Información del 2008)

Entidad	Unidades económicas (UE)	Q Producción bruta total (millones de pesos)	L Personal ocupado total	M Materias primas y materiales (millones de pesos)	W Consumo de agua (m³)	K Activos fijos (millones de pesos)
Ciudad de México	195	4,297	5,834	2,616	584,210	1,087
Estado de México	231	37,980	24,772	17,175	9,203,052	13,800
Hidalgo	6	745	325	274	138,115	23
Total	427	42,757	31,198	20,065	9,495,273	14,911

Elaboración propia a partir del censo económico 2009, INEGI

En la tabla se muestra que en la CVM existían 427 unidades económicas (UE) productoras de papel en el 2008, que en conjunto alcanzan un valor de la producción de papel de 42, 757 millones de pesos al año.

En el cuadro se describe que el Estado de México fue la región con mayor presencia de la industria de papel en la CVM, así como el estado que presentó la mayor producción, así como el mayor número de trabajadores y consumo de agua. El último lugar lo ocupa Hidalgo con el menos número de establecimientos, producción, personal y agua.

Cuadro 3.3: Resumen de base del censo económico 2014
(Información del 2013)

Entidad	Unidades económicas (UE)	Q Producción bruta total (millones de pesos)	L Personal ocupado total	M Materias primas y materiales (millones de pesos)	W Consumo de agua (m³)	K Activos fijos (millones de pesos)
Ciudad de México	339	15,820	22,323	8,838	3,006,211	5,720
Estado de México	13	202	193	113	11,158	50
Hidalgo	252	34,084	20,045	17,516	6,862,526	15,008
Total	604	50,105	42,561	26,467	9,879,895	20,778

Elaboración propia a partir del censo económico 2014

En el cuadro 3.3 se resume que en el 2013 en la CVM existen 604 unidades económicas productoras de papel. Y se anota también que en conjunto alcanzan un valor de la producción de papel de 50,105 millones de pesos al año.

En la tabla anterior se describen en forma agregada las cantidades de insumos utilizados y el valor de la producción de papel, así como la cantidad de unidades económicas (UE) por cada estado de la Cuenca del Valle de México que había en el 2013. Se puede observar que el estado con más UE es la Ciudad de México, el segundo es Hidalgo y el último es el Estado de México. Se observa que con respecto al 2008, para el 2013 hubo un desplazamiento de unidades económicas del Estado de México hacia Hidalgo. Como consecuencia Hidalgo fue el estado con mayor producción de papel (**Q**) y consumo de agua (**W**). Dejando en último lugar al Estado de México.

En el cuadro 3.4 se recopilamos datos del censo económico del 2009 y del censo 2014 como punto de comparación y contraste con respecto al desarrollo tecnológico entre los años 2008 y 2013.

Cuadro 3.4: Comparativo censos económicos 2009 y 2014

Año	Unidades económicas (UE)	Q Producción bruta total (millones de pesos)	L Personal ocupado total	M Materias primas y materiales (millones de pesos)	W Consumo de agua (m3)	K Capital (millones de pesos)
2008	432	43,040	31,461	20,240	9,495,273	15,042
2013	604	50,105	42,561	26,466	9,879,894	20,777
Diferencia	172	7,065	11, 100	6,226	384,621	5735

Elaboración propia utilizando datos de los censos económicos 2009 y 2014.

Como se puede apreciar en la tabla anterior, hubo un crecimiento en la industria del papel, entre el año 2008 y el 2013, que se aprecia por el surgimiento de 172 unidades económicas nuevas en la CVM, por el aumento en la producción de 7 065.19 millones de pesos, el aumento de 6,226 millones de pesos en las materias primas, un incremento de 384 621 m3 de agua consumida en la producción y un aumento del capital (K) de 5,735 millones de pesos.

Al analizar esta tabla se espera obtener un contraste entre el modelo matemático obtenido con información del censo económico de 2009 y 2014, especialmente en el exponente del factor agua α_w .

Estimación del modelo

La estimación del modelo matemático de la función de producción se basa en la función Cobb Douglas: $Q = A L^{\alpha_L} M^{\alpha_M} W^{\alpha_W} K^{\alpha_K}$

Para la estimación del modelo se transformó dicha ecuación a una expresión lineal y queda de la siguiente forma:

$$\ln Q = \ln A + \alpha_L \ln L + \alpha_M \ln M + \alpha_W \ln w + \alpha_K \ln K$$

El primer paso fue transformar la base de datos calculando los logaritmos naturales de la variable independiente y de cada variable dependiente. El segundo consiste en la estimación de la regresión lineal, usando el programa Gretl y las bases de datos descritas arriba. Se aplicó el método de mínimos cuadrados ordinarios para múltiples variables y el software Gretl, obteniéndose los resultados descritos a continuación.

Resultados obtenidos

Se estiman dos modelos, uno para el año **2008** y otro para el año **2013** utilizando la función Cobb Douglas.

Estimación del modelo para el censo económico 2009 (año 2008)

Para estimar la ecuación se utilizaron las **32** observaciones de la base de datos a partir de datos del **2008**. Con el objetivo de encontrar su forma lineal, el primer paso fue transformar la base de datos calculando los logaritmos naturales de todas las variables. La segunda etapa fue la estimación del modelo aplicando el *Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)*. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Cuadro 3.5: Modelo del 2008: parámetros de la función de producción.

	Parámetros	Des. Típica	Estadístico t	valor p	Significancia	R ²
Ln A	4.124	1.536	2.685	0.0123	**	0.95
α_L	0.206	0.230	0.892	0.3802		
α_M	0.160	0.069	2.324	0.0279	**	
α_W	0.580	0.149	3.890	0.0006	***	
α_K	0.065	0.072	0.907	0.3720		

Significancia Estadística: * = 10%, ** = 5% *** = 1%

Fuente: Elaboración propia generada a partir del Censo Económico 2009

Los parámetros que tienen mayor significancia estadística son las elasticidades (α_s) para la variable **W** con un **99%** de confianza, la variable **M** con un **95%** de confianza. El parámetro α_M tiene una mayor significancia **90%** que el parámetro α_L **<90%**, lo que indica que es un valor más confiable debido a que presentó una menor variabilidad y dispersión en sus datos. Y el parámetro α_K tiene una significancia menor al **90%**. El parámetro **Ln A** tiene una significancia de **90%** que se considera alta.

De la tabla se observa que los parámetros con mayor porcentaje de significancia tienen una menor dispersión en sus datos, ya que tiene un valor bajo de su desviación estándar.

R^2 es un parámetro que mide la correlación entre las variables. El modelo arroja una R^2 igual a 0.95, equivale a decir que existe un **95%** de correlación lineal entre el logaritmo natural de **Q** y los logaritmos naturales de las variables independientes, dado que el resultado obtenido es un valor cercano a 1. Los datos en conjunto muestran que el modelo es robusto y justifica la conveniencia de representar el proceso por medio de la ecuación obtenida.

La función de producción en su forma exponencial es:

$$Q = 61.55 L^{0.20} M^{0.16} W^{0.58} K^{0.06}$$

Donde **Q** es la producción, **A** es el factor de escala, **L** son trabajadores, **M** las materias primas y materiales, **W** agua consumida y **K** el capital.

Estimación del modelo para el censo económico 2014 (año 2013)

Para estimar la ecuación se utilizaron las **34** observaciones de la base de datos a partir de información del año **2013**. Como en el caso anterior primero se calcularon los logaritmos naturales de cada variable dependiente e independiente. Con el objetivo de encontrar su forma lineal.

Los resultados obtenidos siguientes se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 3.6: Modelo del 2014: parámetros de la función de producción

Parámetros	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p	Significancia	R^2
Ln A	5.522	1.292	4.271	0.0002	***	0.92
α_L	0.208	0.178	1.168	0.2524		
α_M	0.345	0.094	3.640	0.0011	***	
α_W	0.249	0.089	2.779	0.0095	***	
α_K	0.198	0.133	1.486	0.1482		

Significancia Estadística: * = 10%, ** = 5%, *** = 1%

Fuente: Elaboración propia generada a partir del Censo Económico 2014

Las variables que tienen mayor significancia son las elasticidades (α_s) para las variables **W** y **M** con un **99%** de confianza, caracterizándolas como las variables significativas de este modelo. Para este modelo las variables que tienen menor significancia son **K** y **L**.

El modelo arroja una R^2 cuadrada de 0.92 equivale a decir que existe un **92%** de correlación lineal entre **Q** y las variables independientes. R^2 es un parámetro que mide la correlación entre las variables, dado que el resultado obtenido es un valor cercano a 1, el modelo es robusto y se concluye que es una buena estimación.

A partir de los resultados anteriores la ecuación Cobb Douglas tiene la siguiente forma:

$$\ln Q = \ln 5.52 + 0.20 \ln L + 0.34 \ln M + 0.24 \ln w + 0.19 \ln K$$

Y su forma exponencial es:

$$Q = 249.63 L^{0.20} M^{0.34} W^{0.24} K^{0.19}$$

Donde **Q** es la producción, **M** materias primas y materiales, **W** agua consumida, **L** trabajadores y **K** el capital.

Análisis de resultados

Análisis de resultados modelo 2008

La tecnología de la industria de papel se expresa en la función de producción estimada. Esta ecuación da cuenta de diversos aspectos de la tecnología de la producción de papel en la CVM. Para el caso del 2008 la tecnología de la industria de papel queda representada en la siguiente ecuación:

$$Q = 61.55 L^{0.20} M^{0.16} W^{0.58} K^{0.06}$$

Factor de escala A.

La constante **A** define el factor de escala de la producción, para el modelo del **2008** se obtuvo un factor de escala igual a **61.55** que cumple ser mayor a 1. Dicho resultado define a la tecnología de producción como un proceso de **rendimientos crecientes**. Esto se interpreta como que cuando se utiliza una unidad de cada uno de los insumos, es decir, un trabajador (**L=1**), un peso (\$) de materias primas (**M=1**), un metro cúbico agua en el proceso (**W=1**) y un peso (\$) de capital (**K=1**) es posible obtener \$**61.55** en producción de papel. Este resultado muestra la alta capacidad de producción de dicha tecnología. La existencia de un factor de escala mayor permite obtener una mayor producción de papel con una menor cantidad de cada uno de los insumos. El valor de **A** muestra un proceso de alta tecnología ya que expresa rendimientos crecientes cuando se incrementan todos los insumos al mismo tiempo.

Elasticidad de los factores

Dentro del proceso de producción es posible incrementar un solo factor de producción y que los demás permanezcan fijos, en cuyo caso se observa el siguiente comportamiento. El incremento de un factor y su impacto en la producción depende del valor de su respectivo exponente α . Un valor del exponente alto, indica un mayor impacto en la producción y viceversa. Estos exponentes se conocen como **elasticidades de la producción** y se interpretan como el impacto porcentual en la producción ante cambios porcentuales en cada insumo. La ecuación muestra claramente que el agua registra un exponente de mayor valor ($\alpha_w=0.58$), mostrando que la tecnología de la producción de papel en el **2008** es intensiva en el uso del agua, rasgo que es ampliamente conocido entre los expertos en este proceso. Por lo que evaluamos que el modelo recoge un aspecto importante del proceso de la industria de papel. Este parámetro mide la alta sensibilidad de la producción al uso del agua. Es decir, mide cambios porcentuales del uso del agua y su impacto porcentual en la producción.

$$\text{Elasticidad } \alpha_w = \frac{\Delta\%Q}{\Delta\%w} = 0.58$$

Lo que significa que un incremento en **1%** en el consumo del agua en la elaboración de papel implica un incremento de medio punto (**0.58%**) en la producción de la industria. Esto es, cuando el incremento en el agua es de **100%** el incremento en la producción es de **58%**.

En el caso de las elasticidades de los factores **M, L y K**, la segunda elasticidad más importantes es la del factor mano de obra con un valor de $\alpha_L = 0.206$, en seguida se encuentra la elasticidad de las materias primas y materiales $\alpha_M = 0.160$. Ambas elasticidades presentan valores muy cercanos entre ellos. Y se deduce que parte de los materiales se adicionaban manualmente. Finalmente, la elasticidad de la variable **K** es la que presenta el valor menor valor $\alpha_K = 0.06$, por lo tanto, es la variable con menor influencia en la producción de papel.

Las elasticidades α_s suman uno lo que muestra que el producto total es igual a los productos marginales de forma porcentual de todos los factores (total del valor de las derivadas parciales en forma porcentual es igual al cien por ciento), muestra que al sumar la participación porcentual de todos los insumos se obtiene el producto final. Esta forma de expresarlo permite identificar qué insumos son lo que tiene mayor impacto en la producción. Para este modelo la variable más importante es el agua y la de menor importancia es el capital.

Capacidad de Sustitución entre factores de la producción.

Tasa marginal de sustitución (RTS)

Otro aspecto muy importante de la tecnología es conocer la capacidad de los procesos para sustituir entre sí a los factores de la producción, las variables M, L, K y W se analizaron por pares.

La expresión particular de la RTS entre el agua y la mano de obra fue la siguiente:

$$RTS(w, L) = \frac{(0.58)L^{0.20+0.80}}{(0.20)W^{.42+0.58}} = - \frac{0.58L}{0.20W} = - 2.9 \frac{L}{W}$$

Como se puede apreciar es posible conocer el nivel de sustitución entre los factores en el punto respectivo ya que el valor de la RTS para cada punto es diferente, y depende del valor de **L** y **W** que se analice.

La siguiente combinación corresponde al agua y a las materias primas y materiales. La **RTS(w, M)** es la siguiente:

$$RTS(W, M) = -\frac{\partial M}{\partial W} = \frac{\alpha_W M}{\alpha_M W} = \frac{0.58 M}{0.16 W} = -3.6 \frac{M}{W}$$

Para la tasa técnica de sustitución de agua **RTS(W, K)**. Se tiene:

$$RTS(W, K) = \frac{\alpha_W K}{\alpha_K W} = \frac{0.58 K}{0.06 W} = -9.67 \frac{K}{W}$$

Si se analiza cada una de las expresiones para la **TRS**, se observa que todas las expresiones tienen un **signo negativo**. (Tasa de sustitución técnica decreciente). Esto indica que para incrementar en una unidad el insumo agua se deben reducir el otro insumo para conservar el mismo nivel de producción.

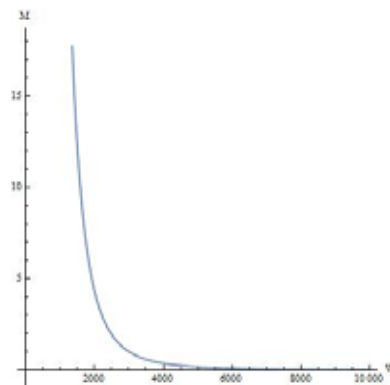
Para el primer caso **RTS (W-L)**, al incrementar un metro cúbico de agua se tiene que dar una reducción equivalente a **2.9 L/W** trabajadores. En el caso de la **RTS(W-M)** al aumentar un metro cúbico se tiene una reducción de **3.6 M/W** pesos (\$) de materias primas y materiales, y para la **RTS (W-K)** si se tiene un incremento de un metro cúbico agua existe una reducción de **9.67 K/W** pesos de capital. El valor exacto depende de la región de la curva de nivel. Siendo la mayor la RTS entre (W y K) de 9.67 y la RTS menor entre (W y L) de 2.9.

i) Elasticidad técnica de sustitución

La Elasticidad Técnica de Sustitución se refiere al análisis de la variación porcentual de la **RTS** para cada variable cuando la relación entre factores varía en forma porcentual. Es decir, equivale a la relación previa, pero con cambios porcentuales lo que significa que no tiene unidades la medida. Es unitaria en la parte cóncava de la curva de nivel seleccionada, lo que simplifica el problema a analizar el “grado de curvatura” de una curva de nivel seleccionada por ejemplo para los factores **W y M**.

Para este ejemplo se supone que las variables **L** y **K** se mantengan constantes y con un valor de 10 trabajadores y 1 millón de pesos respectivamente. Para un nivel de producción se tendría la siguiente curva de nivel.

Gráfica 3.7: Isocuanta de W y M



Para el caso de la isocuanta calculada para los factores **W** y **M**, se tiene que la región más cóncava, se localiza entre los valores $1000 \leq W \leq 4000$. Y para la variable materias y materias se tiene la región $1 \leq M \leq 10$. La región donde se tiene una perfecta sustitución de factores, representa un intervalo limitado.

Producción marginal decreciente de los factores.

Otro aspecto de la tecnología es el escenario en que varios factores de la producción -como pueden ser que el capital, M y L- sean constantes (por razones diversas), y se incremente el uso de otro factor como puede ser el agua, caso en el que se incrementa la producción, pero de forma decreciente.

Este comportamiento de la producción se conoce como productividad marginal decreciente y refleja un comportamiento verificable en los procesos reales. Para realizar el análisis del producto marginal de la producción, se calcularon las respectivas derivadas parciales para cada una de las variables independientes:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = (0.20) \frac{61.55 M^{0.16} W^{0.58} K^{0.06}}{L^{0.80}} = 12.31 \frac{M^{0.16} W^{0.58} K^{0.06}}{L^{0.80}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial M} = (0.16) \frac{61.55 L^{0.2} W^{0.58} K^{0.06}}{M^{0.84}} = 9.8 \frac{L^{0.2} W^{0.58} K^{0.06}}{M^{0.84}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial W} = (0.58) \frac{61.55 L^{0.2} M^{0.16} K^{0.06}}{W^{0.42}} = 35.70 \frac{L^{0.2} M^{0.16} K^{0.06}}{W^{0.42}}$$

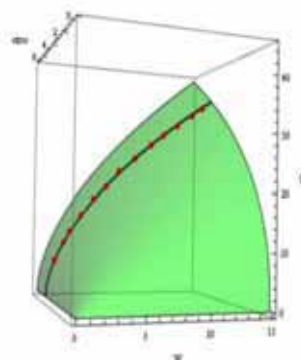
$$\frac{\partial Q}{\partial K} = (0.06) \frac{61.55 L^{0.2} M^{0.16} W^{0.58}}{K^{0.94}} = 3.69 \frac{L^{0.2} M^{0.16} W^{0.58}}{K^{0.94}}$$

Para cada ecuación, al incrementarse una variable y considerar constantes el resto de las variables, se produce un incremento de la producción, pero en forma decreciente. Por ejemplo, para el incremento marginal de Q con respecto a L , se consideran constantes las variables independientes (M , W y K), al incrementarse el factor L , el incremento de Q se disminuye, debido a que la variable L se encuentra en el denominador (ver formula). El comportamiento descrito se observa en cada una de las expresiones previas.

Para un punto específico de una isocuanta, el producto marginal más alto lo define su participación en el producto total, lo cual está definido por su elasticidad, que también muestra su participación en el mismo, en este caso el producto marginal más alto es del factor agua, seguido del trabajo, las materias primas y finalmente el capital.

La gráfica 3.8 ejemplifica puntos para lo que se puede calcular el valor marginal del factor agua, éste se incrementa y el resto de los factores permanecen constantes. Demostrando que se tiene una producción marginal decreciente.

Gráfica 3.8: Valor marginal decreciente



El nivel de los factores fijos afecta la productividad marginal del factor agua

Como se aludió en la sección anterior, el producto marginal se puede calcular para cada uno de los factores de la producción, cuando se elige un factor que se incrementará o se reducirá y el resto de los factores se mantiene constantes. Para el caso de la función Cobb Douglas, en el caso de incrementar la variable que ha sido seleccionada se tiene un incremento marginal decreciente del producto.

En este ejemplo se seleccionó el factor agua como la variable que se incrementará y se muestra el incremento marginal decreciente del producto, para dos casos diferentes (**Casos I y II**). En el primer caso se tienen valores bajos de las variables que se consideran fijas - lo que se interpreta como un escenario en el que se tiene un establecimiento pequeño-, en el segundo caso las variables fijas toman un mayor valor que puede ser una gran empresa. Se busca analizar en qué caso se tiene un mayor nivel de producción de papel, así como se efecto en su producto marginal.

En el cuadro 3.7 se muestran los valores que tomarán como fijos las variables L, M y K. También se muestra en la última columna, que la producción depende únicamente del factor W.

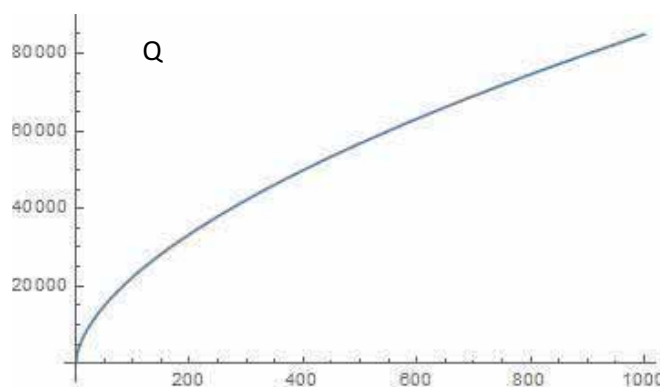
Cuadro 3.7: valores fijos de L, M y k

Caso	L	M	K	Q
I	10	1000	1000	$Q = (61.55) (10)^{-2} (1000)^{0.16} (1000)^{0.06} W^{0.58}$
II	10	9,000	2000	$Q = (61.55) (10)^{-2} (9000)^{0.16} (2000)^{0.06} W^{0.58}$

En la siguiente gráfica se presenta la función de producción relacionando los valores de Q y W, para el caso I. La pendiente de dicha curva es la productividad marginal expresada en la siguiente ecuación. En esta se observa que a medida que aumenta W el producto marginal decrece.

$$\frac{\partial Q}{\partial W} = \frac{(0.58)(4.12L^{0.2}M^{0.16}K^{0.06})}{W^{0.42}}$$

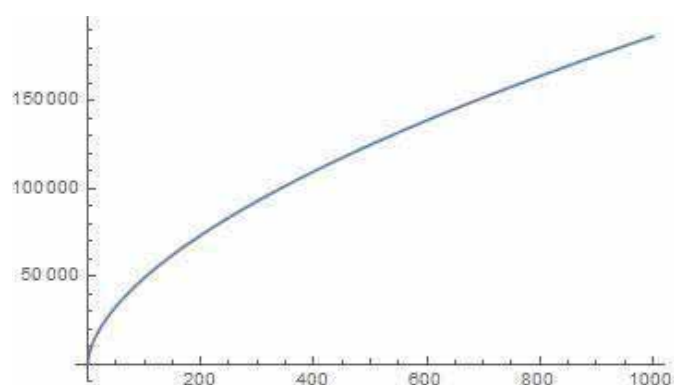
Gráfica 3.9: Caso I



En la gráfica 3.9, para incrementos en el uso del agua **W** (por ejemplo, de 100 a 200 m³) se observa un marcado incremento en el valor de la producción (efecto que tiene el alto valor de la elasticidad), sin embargo, para niveles de mayor uso del agua el producto marginal decrece. En el límite, incrementos en **W** no impactan la producción de papel, - deja de incrementarse- y se considera que es constante sin importar que tan significativo sea el incremento en el uso del agua. Por ejemplo, cuando se realizó la estimación del valor de la función para valores muy altos de las variables independientes (p.e. **W**= 1000 m³), manteniendo constantes las otras variables, se encontró que el valor de la función se incrementa en un porcentaje menor.

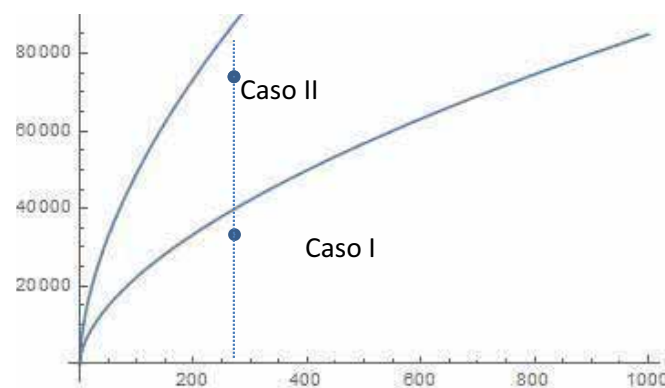
Un caso particular es donde existe una tecnología más avanzada, dicho escenario se representa con valores elevados de **K, L, M**, al sustituir valores elevados en la función de producción dan como resultado niveles de productividad marginal mayores, lo que impacta niveles mayores de beneficios por unidad de producto. En la gráfica siguiente se busca ilustrar dicho incremento el producto marginal del factor agua, al lograrse una producción de **\$11 955.47** con 200 m^3 .

Gráfica 3.10: Caso II



Finalmente, si se analizan ambas gráficas, se puede ver que cuando incrementan los factores **L, M y K**, se logra una mayor producción.

Gráfica 3.11: Comparación de casos 2008



En la gráfica 3.11 también se observa el efecto de incrementar el valor de las variables fijas. Para este año ya que el modelo tiene alta sensibilidad al uso del agua, el efecto de incrementar el resto de las variables fijas es que se tiene una mayor productividad marginal, dicho efecto se aprecia en la gráfica, donde para un mismo nivel del uso del agua se tienen diferentes niveles de producción, por ejemplo, para el $W = 200 \text{ m}^3$ en el primer caso $Q = \$8069$ y para el segundo caso se tiene un resultado de $Q = \$11 955.47$.

Análisis de resultados modelo 2013

Para el caso del **2013**, se utilizó el censo económico **2014**, la tecnología de la industria de papel se expresa en el siguiente modelo. Esta ecuación da cuenta de diversos aspectos de la tecnología de la producción de papel en la **CVM**.

$$Q = 249.63 L^{0.20} M^{0.34} W^{0.24} K^{0.19}$$

Factor de escala A

El factor de escala “**A**” para el modelo **2013**, es un factor de escala mayor a 1. La existencia de un factor de escala mayor a uno permite obtener una mayor producción de papel con una menor cantidad de cada uno de los insumos y define a la tecnología de producción obtenida como una función de retornos crecientes, esto es, cuando se considera que para la producción de papel se utiliza una unidad de cada uno de los insumos: un trabajador (**L=1**), un peso (\$) de materias primas (**M=1**), un metro cúbico (m³) de agua y un peso (\$) de capital (**K=1**) es posible obtener \$**249.63** de producción de papel. El resultado obtenido para este factor de escala permite obtener un nivel de producción alto utilizando una menor cantidad de cada uno de los insumos y muestra un proceso de alta tecnología porque representa una función de rendimientos crecientes, para un incremento simultáneo en el tiempo de cada uno de los factores.

Elasticidad de los factores

Para este año el valor de la elasticidad del agua es de $\alpha_w=0.24$ y su expresión matemática es:

$$\alpha_w = \frac{\Delta\%Q}{\Delta\%w} = 0.24$$

Esto quiere decir que por un incremento de 1% en el consumo del agua la producción se aumenta en 0.24 %. Y un aumento en 10% en el consumo del agua se refleja en un aumento de 2.4%. Este parámetro indica la baja sensibilidad del proceso al uso del agua.

Para el modelo del **2013** el parámetro que tiene la mayor importancia es el factor materias primas y materiales ($\alpha_M=0.34$) al ser el exponente más alto, dicha relevancia probablemente se deba que se han realizado esfuerzos para que los productos químicos utilizados en el proceso de blanqueado sean fácilmente recuperables, y puedan ser utilizados para más de un ciclo de producción. En segundo lugar, se encuentra el factor agua $\alpha_w = 0.24$. En tercer lugar, se encuentra el factor trabajo ($\alpha_L=0.20$) y finalmente el factor capital ($\alpha_K=0.19$).

Las elasticidades del capital ($\alpha_K=0.19$) y de los trabajadores ($\alpha_L=0.20$) son valores muy similares, probablemente se debe a que la operación de la maquinaria y el funcionamiento de las plantas de

tratamiento de agua residuales requieren de personal calificado. Ambas variables tienen una importante participación en la producción.

Capacidad de Sustitución entre factores de la producción.

i. Tasa marginal de sustitución.

Como en el ejercicio anterior, se realizó el cálculo de las respectivas derivadas parciales de cada una de las variables independientes. A partir de la siguiente expresión:

$$RTS(x_1, x_2) = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial x_1}}{\frac{\partial Q}{\partial x_2}} = -\frac{\alpha_1 x_2}{\alpha_2 x_1}$$

Utilizando la expresión anterior para calcular la expresión de la **RTS** del agua y cada uno de los actores restantes.

Para el caso de la RTS entre agua y trabajadores se tiene la siguiente la expresión:

$$RTS(w, L) = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial w}}{\frac{\partial Q}{\partial L}} = -\frac{\frac{\partial L}{\partial w} (\frac{\partial Q}{\partial L})}{\frac{\partial L}{\partial w} (\frac{\partial Q}{\partial L})} = -\frac{(0.24)L^{0.20+0.80}}{(0.20)w^{0.24+0.76}} = -\frac{0.24L}{0.20w} = -1.2 \frac{L}{w}$$

La tasa técnica de sustitución de agua y materias primas y materiales, **RTS(w, M)**. Se observa la expresión:

$$RTS(w, M) = -\frac{\frac{\partial M}{\partial w}}{\frac{\partial M}{\partial M}} = -\frac{\alpha_w M}{\alpha_M w} = -\frac{0.24M}{0.34w} = -0.70 \frac{M}{w}$$

Finalmente, la **RTS(w, K)** entre agua y capital K

$$\frac{\alpha_w K}{\alpha_L w} - \frac{\partial M}{\partial w} = \frac{\alpha_w K}{\alpha_k w} = \frac{0.24K}{0.19 w} = -1.26 \frac{K}{w}$$

Todas las expresiones tienen un **signo negativo**. (Tasa de sustitución técnica decreciente). Esto es para reducir en un metro cúbico el insumo agua y conservar el mismo nivel de producción los diferentes factores de la producción deben incrementarse en las siguientes magnitudes. Para el primer caso **(W-L)** se tiene un incremento de **1.2 L/W** trabajadores, el segundo caso **RTS (M-W)**, para una reducción de un metro cúbico de agua se tiene un incremento de **0.70M/W** pesos (\$) de materias primas y materiales, y finalmente para la **RTS (W-K)**, un decremento de un metro cúbico de agua significa un incremento de **1.26K/W** pesos (\$) de capital. El valor exacto depende de la región de la curva de nivel. Siendo la **RTS** entre **(W y K)** de 1.26 la mayor y la **RTS (W-M)** entre **(W y M)** de 0.70 la menor.

De las ecuaciones anteriores, se puede observar que, si se evalúa el mismo valor del factor agua la pendiente para cada expresión es diferente, lo que permite conocer el nivel de sustitución entre los factores para un mismo punto.

Cuadro 3.8: Ejemplos para este caso son:

Punto	L	M	W	K	Q
A	82	194,000	30,368	7,706,000	9,166,235
B	311	21,675,000	15,053	30,869,000	65,420,103
C	1,385	1,234,024,000	91,789	643,444,000	957,908,644

Para el punto A, se tienen los siguientes resultados

$$RTS(w, L) = -\frac{1.2L}{W} = -1.2 \frac{82}{30\,368} = -0.0032$$

$$RTS(w, M) = -0.70 \frac{M}{W} = -0.70 \frac{194\,000}{30\,368} = -4.471$$

$$RTS(w, K) = -1.26 \frac{K}{W} = -1.26 \frac{7,706,000}{30\,368} = -319.72$$

Para el punto B

$$RTS(w, L) = -\frac{1.2L}{W} = -1.2 \frac{311}{15,053} = -0.029$$

$$RTS(w, M) = -0.70 \frac{M}{W} = -0.70 \frac{21,675,000}{15,053} = -1007.93$$

$$RTS(w, K) = -1.26 \frac{K}{W} = -1.26 \frac{30,869,000}{15,053} = -2583.86$$

Para el punto B, se tienen valores altos de las **RTS** los casos entre los factores **W** y **K**. Y como en el caso anterior se tiene una baja capacidad de sustitución entre la trabajadores y agua.

Para el punto C

$$RTS(w, L) = -\frac{1.2L}{W} = -1.2 \frac{1,385}{91,789} = -0.029$$

$$RTS(w, M) = -0.70 \frac{M}{W} = -0.70 \frac{1,234,024,000}{91,789} = -9410.8$$

$$RTS(w, K) = -1.26 \frac{K}{W} = -1.26 \frac{643,444,000}{91,789} = -8832.64$$

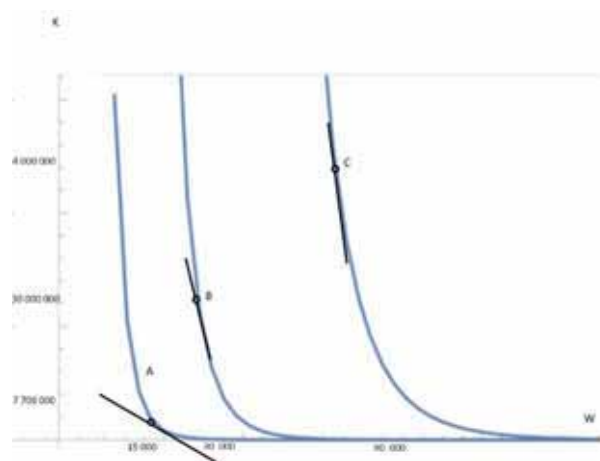
El punto **C**, se localiza en una región donde la superficie tiene una pendiente pronunciada, se localiza una zona menos cóncava y se tiene una capacidad de sustitución que resulta más cara.

La tecnología muestra un mayor costo para sustituir agua por los factores **M** y **K**, esto significa que es posible sustituir agua con materias primas y capital, esto muestra una mayor flexibilidad del proceso de producción, ante un escenario donde se tienen limitaciones en el uso del factor agua.

Para el caso de la **RTS** más alta que es entre **K** y **W**, se tiene el siguiente comportamiento. Para un mayor nivel de producción se tiene un mayor costo de sustitución. Entre los factores trabajo y agua la **RTS** es muy baja.

La gráfica 3.12 muestra la capacidad de sustitución entre **los factores agua y capital** para diferentes niveles de producción.

Gráfica 3.12 RTS entre W y K



La gráfica anterior muestra los valores la **RTS** entre el **K** y **W** en los puntos **A**, **B** y **C**. Y permite visualizar las regiones de las curvas de nivel y su relación con la pendiente calculada. Por ejemplo, el punto **A** se encuentra en una región con mayor curvatura, en punto **B** se aleja de la curvatura y el punto **C** se localiza en una región aún más alejada de la curvatura de su correspondiente curva de nivel.

La capacidad de sustitución entre materias primas y agua es muy costosa en el punto **C**, explicación relacionada con nuevos materiales como químicos que son recuperables y facilitan el reciclaje del agua.

ii) Elasticidad técnica de sustitución (σ_s)

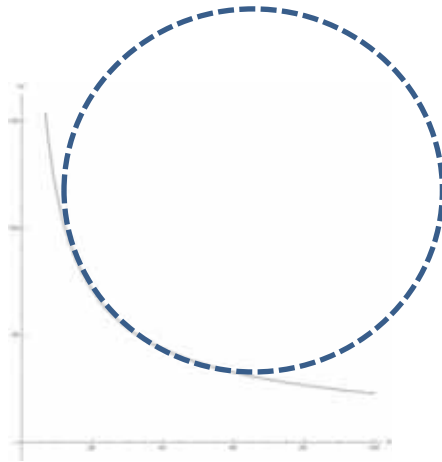
La **elasticidad técnica de sustitución** entre las variables independientes se define como los cambios porcentuales en x_1 que son sustituidos por cambios porcentuales en x_2 para mantener el nivel de z constante. Para el caso particular de la función estimada que es de múltiples variables.

Se calcula por cada par de variables como fue en caso de la **RTS**. Y para esta función la variable independiente es la producción **Q**.

El valor de la elasticidad de sustitución entre cada par de variables independientes representa el valor de la curvatura de la isocuanta.

Este análisis de la función de la elasticidad entre factores se puede realizar de forma gráfica (2 dimensiones), por ejemplo, para calcular la **elasticidad técnica entre los factores W y M** (σ_{s_w-m}), es necesario considerar como constantes a las variables **L=10** y **K=1**.

Gráfica 3.13 σ_s Para los factores W y M



Para este caso, la gráfica de la curva de nivel muestra una curvatura similar a la de una circunferencia entre los valores de 5 a 120 unidades de **M** y de 5 a 60 para **W**. Para dicha región se tiene un valor unitario de la *elasticidad técnica de sustitución*.

Valor marginal decreciente de los factores.

Para realizar el análisis del **valor marginal** de la producción con respecto de cada una de las variables independientes, se calcularon las respectivas derivadas parciales:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = (0.20) \frac{249.63 M^{0.34} W^{0.24} K^{0.19}}{L^{0.8}} = 149.7849.92 \frac{M^{0.34} W^{0.24} K^{0.19}}{L^{0.8}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial M} = (0.34) \frac{249.63 L^{0.20} W^{0.24} K^{0.19}}{M^{0.66}} = 84.87 \frac{L^{0.20} W^{0.24} K^{0.19}}{M^{0.66}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial W} = (0.24) \frac{249.63 L^{0.20} M^{0.34} K^{0.19}}{W^{0.76}} = 59.91 \frac{L^{0.20} M^{0.34} K^{0.19}}{W^{0.76}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = (0.19) \frac{249.63 L^{0.20} M^{0.34} W^{0.24}}{K^{0.81}} = 47.42 \frac{L^{0.20} M^{0.34} W^{0.24}}{K^{0.81}}$$

El valor del incremento marginal de la producción con respecto a cada uno de los factores depende del punto en que se evalúa la expresión que se expresa en el valor fijo que tomen el resto de los otros factores, del valor de las elasticidades de los factores, del factor para el que se está calculando este incremento y del valor de la constante **A**.

La función Cobb Douglas, al ser una función exponencial, tiene un incremento marginal decreciente para todos los factores. Por ejemplo, para el valor de marginal de **Q** con respecto a **M**, se consideran constantes las variables independientes (**L, W y K**), y al incrementarse el factor que se encuentra en el denominador, el incremento de **Q** se disminuye. Dicho comportamiento se observa en cada una de las expresiones.

El nivel fijo de los factores afecta la productividad marginal del factor agua

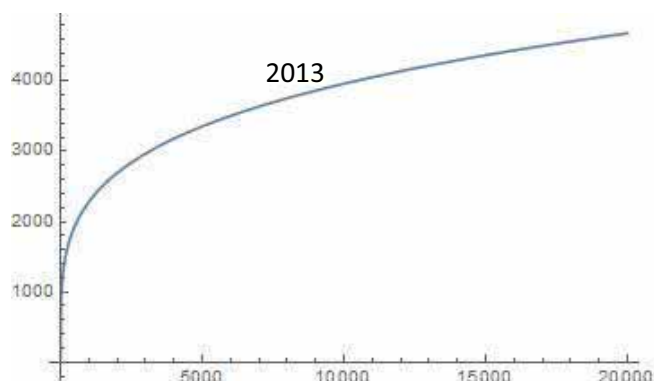
A continuación, se ejemplifica el valor marginal de la producción con respecto al factor agua para dos diferentes escenarios I y II, el primero que se tiene una cantidad limitada de recursos y el segundo donde se tiene una mayor cantidad disponible de estos mismos.

Cuadro 3.9: Valores fijos L, M y K

Caso	L	M	K	Q
I	16	1	1	$Q = (249.53) (16)^{-2} (1)^{0.16} (1)^{0.06} W^{0.24}$
II	3000	9,000	20000	$Q = (249.53) (3000)^{-2} (9000)^{0.16} (20000)^{0.06} W^{0.24}$

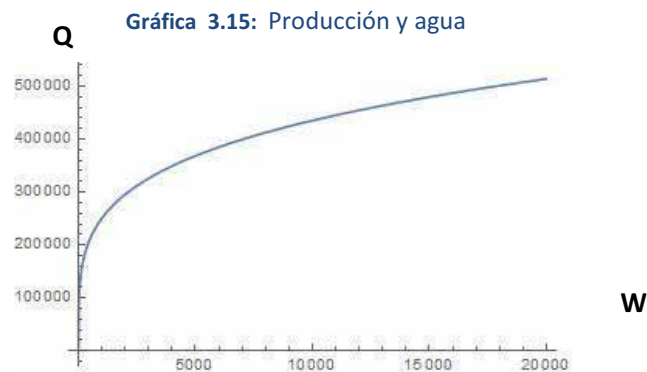
Si se realiza el ejercicio para la función del **2013**, incrementando el consumo de agua en un metro cúbico y manteniendo los factores constantes. Para el caso **I** donde las variables fijas toman los valores **M=1, L=16** trabajadores y **K=1**, al evaluar la función para diferentes cantidades de **W**, se tiene la gráfica siguiente.

Gráfica 3.14: Producción de papel caso I



Para los primeros incrementos en el consumo del agua (por ejemplo, de 1 a 5000 m³) se presenta un incremento importante pero decreciente y partir de las **20,000** unidades de agua se registra un valor marginal decreciente muy bajo. Si el insumo agua continúa incrementándose hasta alcanzar el valor de infinito, el valor de la producción tiende a ser constante. Sin importar para cual variable independiente se realice el análisis del efecto en la producción, al incrementar la variable seleccionada, debido a la propiedad de tener un *producto marginal decreciente*, para un consumo muy elevado de dicho insumo, el incremento en la producción de papel resulta mínimo, para dicho punto se considera que la producción de papel deja de incrementarse y se considera que es constante sin importar que tan significativo es el incremento en el uso del recurso.

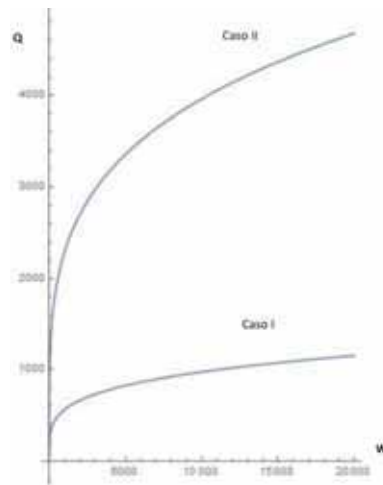
Este mismo ejercicio para el caso **II** con los valores fijos siguientes: (**L=3000, M=9,000, K=20,000**). Se tiene:



Al incrementarse los valores de las variables que se mantiene fijas el valor de la producción se incrementa en el orden de miles. Este resultado muestra que con respecto al resto de las elasticidades han tomado una mayor importancia en la función de producción, en el año **2013**. Es decir, el nivel de la producción aumenta cuando se incrementan todos los factores.

En la siguiente gráfica se muestran ambas funciones de producción para los puntos **I** y **II**. En la que se muestra que con el incremento del valor de los insumos **L, M y K** la producción, se eleva de forma significativa. Dicho comportamiento favorece el ahorro en el consumo del agua. Ya que con el mismo consumo de agua si se incrementan el resto de los factores, es posible lograr mayores niveles de producción.

Gráfica 3.16: Comparativo de producción del año 2013



Comparación entre las tecnologías del año 2008 y 2013 en la industria de papel en la CVM

A partir de los resultados previos, ambas funciones se comparan en el siguiente cuadro:

Cuadro 3.10: Comparativo de dos funciones técnicas de producción de la CVM

Año de análisis	2013	significancia	R^2	2008	Significancia	R^2
	Coeficiente		0.92	Coeficiente		0.95
Ln A	5.522	***		4.124	**	
A	249.630			61.550		
α_L	0.208			0.206		
α_M	0.345	***		0.160	**	
α_W	0.249	***		0.580	***	
α_K	0.198			0.065		

Significancia Estadística: * = 10%, ** = 5%, *** = 1%

En el cuadro se observa que el modelo del 2008 es ligeramente más robusto que el del 2013, sin embargo, la significancia de ambos modelos es buena por lo que es pertinente realizar un análisis comparativo. Para ambos modelos el valor de R^2 es cercano a uno.

Se presentan ambos modelos en su forma no lineal en el siguiente cuadro.

Cuadro 3.11: Comparación de ecuaciones

Modelo obtenido para 2008	Modelo obtenido para 2013
$Q = 61.55 L^{0.20} M^{0.16} W^{0.58} K^{0.06}$	$Q = 249.63 L^{0.20} M^{0.34} W^{0.24} K^{0.19}$

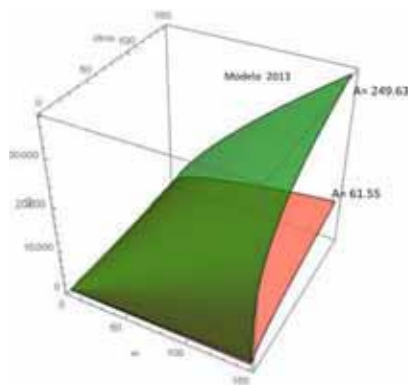
Ambos modelos son funciones Cobb Douglas, en la que la suma de sus alfas es igual a uno, y la constante $A > 0$.

Factor de escala A

El factor de escala A de la tecnología en ambos modelos es mayor a uno, para el año 2008 es de 61.55 y para el 2013 es de 249.63, mostrando un incremento de 3 veces en el periodo de cinco años que indica un incremento en la capacidad productiva de la industria de papel debido a una mejora en su tecnología.

El factor de escala se evalúa al considerar que con una unidad de cada factor ($L=1, M=1, W=1, K=1$) la producción es de \$ 61.55 de producto en el 2008 y para el 2013 la producción es de \$249.63. Esta diferencia puede interpretarse como que la industria se transformó para obtener mayores rendimientos debido a mejoras en su tecnología. Que en conjunto ha logrado un mejor aprovechamiento de todos y cada uno de los recursos, lo que es claro al ver que una misma unidad de cada factor genera mayor producción.

Gráfica 3.17 Posibilidades de producción de los Modelos 2013 - 2008



En la gráfica 3.17 se muestra el efecto del factor de escala **A**, en el eje **x** se ilustra el factor **w**, en el eje **y** se expresa el valor de la producción. El efecto del factor de escala es incrementar el nivel de producción, cuando se tiene una misma cantidad de los factores. El factor de escala **A=249.63** representa a la tecnología que se encuentra más desarrollada, la cual corresponde al modelo del **2013**. Y el factor de escala **A=61.55** representa un menor grado de desarrollo registrado en el **2008**.

En la historia de la producción de papel en México siempre existió un compromiso por mejorar la tecnología y prácticas de producción, tal como fue el ejemplo de la empresa *Peña Pobre Loreto*, donde se realizaron los primeros esfuerzos por reducir los impactos ambientales ocasionados por la producción de papel.

Elasticidad de los factores

En la tabla comparativa de ambos modelos es posible observar que hubo una disminución en el valor de la elasticidad del agua (α_w) y la producción entre el año **2008** y el **2013**, el valor de la elasticidad del agua se redujo a $\alpha_w = 0.24$ para el año **2013**, esta elasticidad es menor que la presentada en el **2008**, $\alpha_w = 0.58$, mostrando una disminución de $\Delta\alpha_w = -0.34$ **que significa una reducción del 58%**. La reducción en la elasticidad del factor expresa que la producción de papel se realiza en el 2013 con menos agua al ser utilizada de manera eficiente: usa una menor cantidad de agua para producir una mayor cantidad de papel, respecto a la del año **2008**. Este cambio se ha logrado gracias a la implementación de plantas de tratamiento y sistemas de recirculación. Se ha logrado una reducción de la intensidad del uso del agua en la producción de papel.

Los cambios en la elasticidad entre la producción y el agua en ambos modelos indican que existió un gran avance tecnológico con tecnologías ahorradoras de agua. A diferencia del modelo estimado para el **2007**, donde el valor de $\alpha_w = 0.58$ indicó la importante sensibilidad del agua dentro del proceso productivo de la industria de papel. La reducción de este parámetro al valor $\alpha_w = 0.24$ refleja el esfuerzo realizado por grandes empresas por mantenerse a la vanguardia de la tecnología en el uso del agua. Cabe mencionar que una de las grandes empresas recibió en el **2015** el premio Water Efficiency Award, debido a que redujo claramente el consumo del agua en su producción, al mismo tiempo esta empresa debe mostrar un desarrollo de tecnología que les permita mantener de forma constante esta reducción, por medio del desarrollo de mejores prácticas disponibles, o cualquier forma eficiente de trabajo que permita la reducción del uso del agua por medio del uso de filtros, sistema de recirculación y reciclaje del agua, que le permita maximizar la producción con el mínimo uso del agua. **Del 2008 al 2013 se ha presentado un importante proceso de innovación tecnológica, el cambio más importante se observa en la menor intensidad en el uso del agua**

El resultado mencionado muestra que en el periodo 2008 a 2013 el uso del agua en la producción de papel en la CVM se ha reducido en la industria, en promedio se ha reducido siguiendo el ejemplo de las empresas ganadoras del premio de la eficiencia del agua.

Las unidades económicas han implementado las siguientes acciones con las que se logró un marcado desarrollo tecnológico:

- Las empresas usan la más alta tecnología en sus sistemas de tratamiento de agua residuales y tiene procesos de optimización de consumo de agua “cero efluentes” que permiten maximizar el uso del líquido y reutilizarlo al máximo.
- Ha realizado inversiones en tecnología que permite mejorar el aprovechamiento de la energía y mejorar los procesos de reciclaje de papel y agua (Garcidueñas, s.f.).
- La implementación de sistema de recirculación ha permitido reducir la sensibilidad de la producción de papel ante variaciones en el uso del agua.

Ya que el parámetro elasticidad representa la sensibilidad de la producción es posible compararlo con resultados de estudios similares. De tal forma que se recopilaron datos para diferentes años y regiones del mundo dedicadas a la producción de papel, la recopilación de datos de diferentes años permite analizar y conocer el desarrollo tecnológico de la industria de papel.

Algunos ejemplos de datos de elasticidades son los casos de la elasticidad de USA calculada en un estudio realizado en 1992 muestra un valor de **0.18** (Renzetti, 1992), mostrando que desde dicho año las empresas han mostrado un compromiso para hacer más eficientes sus procesos. Ya que el proceso de producción de papel incluye un proceso de recirculación. Si se compara dicho valor de la elasticidad de **EUA (0.18)**, con la elasticidad del modelo obtenido para el **2008 ($\alpha_w = 0.58$)**, la industria del papel en la CVM era **3.2 veces (.58/.18)** más intensiva que la industria de EUA de 1992. Para el caso del modelo obtenido para el **2013, ($\alpha_w = 0.24$)** la industria logró reducir su elasticidad y acercarse a la de EUA **(.24/.18)**. Es posible decir que la industria de papel en la CVM está logrando desarrollar su tecnología de modo que permite reducir su intensidad en el consumo de agua, y esta tecnología puede considerarse similar a la que se tenía en Estados Unidos en **1992**.

Una segunda región con la que se puede contrastar es China, el estudio se realizó en **1993** y se obtuvo un dato de una elasticidad de $\alpha_w = 0.10$. Este valor es menor al registrado para la industria americana. Y comparada con el estudio para la CVM, para el modelo **2008**, que corresponde a $\alpha_w = 0.58$ se puede decir que la producción de papel era intensiva en el uso del agua. Si se compara el valor de la elasticidad del agua obtenido para el **2008 ($\alpha_w = 0.58$)**, este valor fue **5.8 veces** más alto que el registrado para China, comparando con esta misma región ahora para el resultado del modelo del **2013** se obtiene que es **2.4 veces** más alto en la CVM que en China. A pesar de que hubo una reducción **(.58 a .2)**, **el valor de $\alpha_w = 0.24$** es un valor que sigue considerándose alto respecto a esa industria China.

Un tercer país con el que se puede comparar a la industria de papel de la CVM es la industria chilena (Vargas Ovando, 2015), la cual reporta el valor más bajo de su elasticidad ($\alpha_w = 0.017$), siendo el país menos intensivo en el uso del agua. Comparado con dicho valor el modelo correspondiente al 2008 era **34 veces** mayor, y para el modelo del **2013**, fue **14 veces** mayor. Sin embargo, este dato hay que tomarlo con mucha reserva.

Bajo este panorama la industria de papel en la Cuenca del Valle de México ha logrado reducir el consumo del agua entre el periodo **2008 y 2013**. Sin embargo, aún tiene largo camino para tener una sensibilidad mínima como es el ejemplo de la industria china y chilena.

Al analizar las elasticidades del resto de los factores de la producción, se perciben los esfuerzos realizados enfocados en mejorar la tecnología, por ejemplo, si se analiza la elasticidad de la producción con respecto al capital (α_k), se registra un aumento de $\alpha_k 2008 = 0.06$ a $\alpha_k 2013 = 0.19$, en cinco años se triplico la elasticidad del capital, lo que puede interpretarse como una adquisición de nueva maquinaria incluido plantas de tratamiento de aguas residuales, filtros, implementación de sistemas de reciclaje y recirculación de agua. Con respecto a las materia primas y materiales (α_M), se registra un aumento de $\alpha_M 2008 = 0.16$ a $\alpha_M 2013 = 0.34$, lo que representa un aumento de la sensibilidad de la producción al uso del diferentes materias primas y materiales, un cambio en el uso de los materiales puede representarse por una selección de materiales que resultan más amigables con el ambiente, como son el papel reciclado, los blanqueadores y químicos que sean recuperables y pueden ser utilizados nuevamente en el proceso de producción del papel. El parámetro elasticidad de la producción con respecto al personal o trabajo (α_L), puede considerarse que se mantuvo constante, ya que el cambio fue registrado en su tercer decimal, disminuyendo de $\alpha_L 2008 = 0.208$ a $\alpha_L 2013 = 0.206$. Esta consistencia muestra que, a pesar de surgimiento de la nueva tecnología para la producción de papel, esta no ha desplazado al personal, debido a que los trabajadores cumplen funciones diversas como son: la supervisión y operación de las plantas de tratamiento de aguas residuales, la operación de máquinas de papel, entre otras funciones. El avance tecnológico se ha logrado debido a que se han implementado sistemas de recuperación de agua proveniente del sistema de formación de hojas y se han empezado a utilizar materiales más amigables con el ambiente.

Capacidad de Sustitución entre factores de la producción.

i) Tasa marginal de sustitución.

En el siguiente cuadro se presenta de manera sintética las diferentes relaciones técnicas de sustitución (**RTS**) entre el agua y trabajo, agua y materias primas y agua y capital, para los dos modelos.

Cuadro 3.12: Cuadro comparativo

Modelo 2008	Modelo 2013	Diferencia en coeficiente	%
$RTS(W, L) = -2.90 \frac{L}{W}$	$RTS(W, L) = -1.20 \frac{L}{W}$	Reducción de 1.7	$1.7/2.90 (100) = 41\%$
$RTS(W, M) = -3.60 \frac{M}{W}$	$RTS(W, M) = -0.70 \frac{M}{W}$	Reducción de 2.9	$2.9/3.6(100) = 80.55\%$
$RTS(W, k) = -9.67 \frac{K}{W}$	$RTS(W, k) = -1.26 \frac{K}{W}$	Reducción de 8.71	$8.71/9.76(100) = 89.24\%$

Como se puede observar en la tabla anterior, la capacidad de sustitución entre factores se modificó en forma importante en el periodo de estudio:

- La RTS (W-L) redujo su coeficiente en **1.7**.
- La RTS (W-M) redujo su coeficiente en **2.9**.
- La RTS (W-K) redujo su coeficiente en **8.71**.

En el periodo estudiado, la capacidad de sustituir el agua por otro factor de producción requiere de menos cantidad de cada factor para lograrse, lo que permite que sea factible sustituir el uso del agua por dichos factores, esto se logró porque observando el modelo para el **2013** se tiene que es más eficiente el proceso productivo en la sustitución del agua por los otros factores. El mayor ajuste se presentó entre el capital y el agua ya que se redujo en **89%**, seguido de materias primas con un **80%**, y con una menor reducción se encuentra la sustitución entre trabajo y agua **41%**. Este comportamiento explica por el cambio tecnológico que se registró en el periodo. La expresión que sufrió el mayor cambio fue la relación entre **W** y **K** y la menor fue entre **W-L**.

La reducción observada en cada uno de los coeficientes calculados para las expresiones de las **RTS** entre agua y cada uno de los factores describe una mayor posibilidad de sustitución entre los factores, debido a que se requieren menores cantidades de los factores para sustituir el uso del agua, y como consecuencia existe una mayor capacidad de sustituirla. Este fenómeno se presenta especialmente en la relación entre el agua y el capital, dicho cambio representa una reducción en **89.24%** de su valor reportando para el **2008**. Este cambio tan marcado se refleja en que el exponente del factor **K** aumento de **0.06** a **0.19**, tomando este insumo una mayor importancia en el proceso de producción de papel. Este cambio preciso en la tecnología tiene como contexto el elevado estrés hídrico que registra la CVM.

Los factores que reportan el menor intercambio son agua y trabajadores, sin embargo, porcentualmente este cambio fue de **41%**. El cambio se debe principalmente al cambio en la elasticidad del agua y la producción, ya que la elasticidad de la producción con respecto a los trabajadores registro una variación de **0.208** a **0.206** es decir de **0.002**.

Estos valores explican en que aspectos específicos se presentó el cambio tecnológico, el caso más claro fue la reducción del uso del agua al implementar maquinaria con mayor eficiencia. Y en segundo lugar al utilizar materiales que son recuperables, el recuperar los materiales facilita el tratamiento del agua residual. Lo anterior explica que la elasticidad de la RTS es unitaria en la parte más cóncava, que muestra el supuesto de perfecta sustitución entre factores.

Producción marginal decreciente para ambos periodos

En las secciones anteriores se calculó el producto marginal para el factor **W** cuando el resto de los factores se mantiene constantes. Y se demostró que en la función Cobb Douglas, en el caso de incrementar la variable que ha sido seleccionada se tiene un incremento marginal decreciente del producto.

Para cada uno de los modelos presentados para los años 2008 y 2013 se presentaron dos casos (Casos I y II). En el primer caso se tienen valores bajos de las variables que se consideran fijas, en el segundo caso las variables fijas toman un mayor valor.

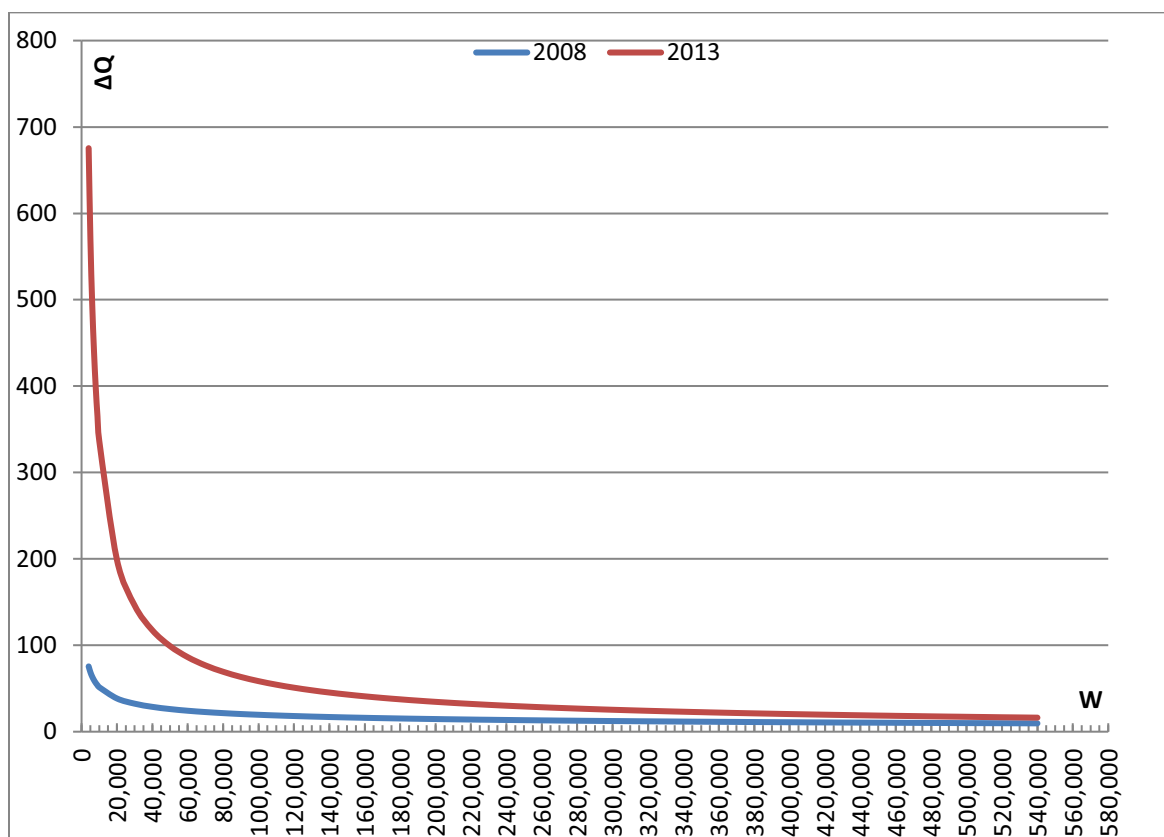
A continuación, se retoman para los años **2008** y **2013**, el ejemplo del caso II (se tienen valores medios de las variables que se consideran fijas). Se busca analizar cómo era el comportamiento de

la producción con respecto a un aumento o una reducción en el uso del agua, en un escenario en el que se tienen recursos limitados. Los valores de las variables que se consideran fijas se muestran a continuación:

Cuadro 3.13. Valores que se consideran fijos para L, M y K Caso I

Año	L	M	K	Q
2008	1,252	358,441	320,562	$\frac{\partial Q}{\partial W} = 35.70 \frac{L^{0.2} M^{0.16} K^{0.06}}{W^{0.42}} = \frac{2,461.7}{W^{0.42}}$
2013	1,252	358,441	320,562	$\frac{\partial Q}{\partial W} = 59.91 \frac{L^{0.2} M^{0.34} K^{0.19}}{W^{0.76}} = \frac{369,137.3}{W^{0.76}}$

Gráfica 3.19. Comparativo del producto marginal 2008 y 2013



En la gráfica se observa que la curva del 2013 se ubica arriba de la del 2008, lo que muestra que se tiene un mayor valor de producto marginal respecto a la producción del 2008. Esto muestra que

en el 2013 se tiene un uso más eficiente para el 2013, ya que este valor se ve impactado por el valor de escala $A=249$.

También se puede ver en la gráfica que para un mayor incremento en el uso del agua el valor de la pendiente para ambos periodos es similar (por ejemplo, para un consumo de agua de 300,000 m³ se tiene un incremento marginal para el 2008 de 12.3 y para el 2013 de 25.3, esto es una diferencia del modelo 2013).

Conclusiones de capítulo 3

En la función de producción Cobb Douglas el parámetro **A** mide la escala de producción, he indica y para el 2013 este parámetro vale \$249.63 que es tres veces el valor del 2008. En este periodo la capacidad productiva de la industria en la CVM se incrementó en 3 veces explicado por avance tecnológico. Esta industria al tener un valor de **A>1** registra rendimientos crecientes, y su crecimiento tan importante de A indica su dinamismo desde el punto de vista tecnológico.

En la función de producción Cobb Douglas el parámetro α representa la elasticidad de la producción con respecto a cada uno de los factores. Un exponente alto (cercano a la unidad, indica una alta sensibilidad de la producción con respecto al factor que se está analizando), por otra parte, un valor bajo de cada uno de los factores (cercano a cero) representa una baja sensibilidad de la producción con respecto al factor. Por ejemplo, para el modelo 2008 se tuvo un valor alto en la elasticidad del agua ($\alpha_w= 0.58$, caracterizando la) y bajo para el caso del k ($\alpha_k= 0.06$). Esto muestra que la industria de papel es menos intensiva en el uso del agua en el 2013 respecto al 2008.

El análisis de elasticidades muestra un compromiso internacional para reducir el consumo de agua en la industria de papel, por medio de desarrollo tecnológica y prácticas que se consideran eficientes en el consumo del agua.

A través del parámetro **RTS** se logró captar cuales son los aspectos tecnológicos que permitieron, lograr la reducción del uso del agua en la producción de papel. Este indicador muestra que el capital ha sido el sustituto más importante en el uso del agua, seguido del uso de materias primas, y en último lugar lo ha sido el uso del trabajo.

La representación gráfica de la producción cuando sólo varía el factor agua permite contrastar la capacidad de producción de la industria, el modelo para el periodo 2013 mostro una mayor capacidad productiva.

Los resultados obtenidos muestran claramente la potencia del modelo no lineal para captar los rasgos más importantes de la tecnología de producción de procesos industriales, y la importancia de estudios empíricos para situaciones y regiones específicas de México.

Conclusiones Generales

La producción de papel, tanto en México, cómo en el mundo se encuentra en constante crecimiento, ya que el papel ha sido fundamental para cubrir las necesidades de la población de cualquier región o localidad del mundo, desde tiempos antiguos. Es el principal soporte de la escritura (incluso con el uso de medios electrónicos, que ha disminuido su uso) y es importante para envolturas y envases.

Desde su descubrimiento en China en el año 105 d.c., los métodos y sus principales insumos para su fabricación se han modificado a lo largo de la historia. Los cambios de los insumos han ocurrido debido al descubrimiento de nuevos materiales, la escasez de estos y la tecnología que permitió el uso de diferentes materiales como en los tipos de árboles para la obtención de la celulosa. A pesar de los cambios de sus insumos, el uso del agua siempre ha sido fundamental en la producción de papel. Los métodos de producción evolucionaron debido al desarrollo de la tecnología.

Desarrollo tecnológico

El desarrollo tecnológico en la producción de papel en sus inicios se vio reflejado con el surgimiento de los molinos, de la pila holandesa y finalmente la máquina de papel; en el siglo XXI con el desarrollo de nuevas formas de producción de pulpa; y en fechas más recientes con la innegable necesidad de optimizar los recursos, desarrollando máquinas con mayor eficiencia energética, sistemas de recuperación de químicos y el más destacable para este trabajo, el sistema de recirculación de agua.

El primer desarrollo tecnológico fue la incorporación de molinos, que facilitó la producción de papel. Posteriormente surgió la pila holandesa que permitió el uso de la celulosa de madera, el cual ha sido el componente principal, antes de este gran avance, la fabricación del papel era un proceso complicado e ineficiente. Finalmente, el surgimiento de la máquina de papel facilitó la producción de las hojas de papel y permitió enfrentar el aumento de la demanda de papel provocado por el surgimiento de la primera imprenta.

Un impacto del aumento de la demanda de papel en el mundo ha sido la causa de la preocupación por la reducción de uso de materiales, agua y energía por unidad de producto. Y esto se ha reflejado en que la maquinaria utilizada en la producción de papel ha sufrido grandes modificaciones.

Actualmente, las innovaciones tecnológicas son, la flexibilidad en el proceso de fabricación de papel y cartón, mejoras en el uso de informática, telecomunicaciones, uso de software y programación electrónica para controlar las etapas del proceso de producción de papel. Debido a la innegable necesidad de optimizar los recursos, se ha aumentado la eficiencia energética de las máquinas de papel, surgieron el sistema de recuperación de químicos y el sistema de recirculación de agua que ha mostrado grandes ahorros en el consumo del agua. La productividad y la calidad aumentaron gracias a las innovaciones que facilitan las tareas y permiten aumentar la velocidad de producción.

Materiales

La sustitución de materiales utilizados para la fabricación de celulosa fue la principal forma de enfrentar la escasez de materiales (por ejemplo, de las telas que eran las materias primas para la producción de papel, antes de la pila holandesa,) presentada en el transcurso del tiempo como en México como el mundo. Trapos viejos por madera, diversos tipos de madera y blanqueadores con gas cloro por blanqueadores libres de cloro.

La preocupación por la reducción del uso de materiales, agua y energía surgió como consecuencia del aumento de la demanda de papel en el mundo. La producción de papel a partir de fibras recicladas ha permitido reducir el consumo de madera, sin embargo, el uso de fibras recicladas implica el uso de agua para la remoción de tintas antes de que las fibras puedan ser reutilizadas.

La opción de adquirir pulpa deshidratada permite a los establecimientos (conocidos como plantas no integradas) producir papel sin la necesidad de adquirir directamente la madera para la producción de pasta, este cambio implica que la empresa utilice una cantidad menor de agua ya que esta puede omitir las etapas de preparación de materias primas, así como a la producción de la pulpa.

Debido que existen diferentes tipos de papel, que poseen características y calidad diferentes, existentes diferencias en la producción del papel. Los altos estándares de calidad del papel con alto grado de blancura requieren adicionar una gran cantidad de químicos, los cuáles les dan las propiedades buscadas. El uso de dichos químicos involucra un alto consumo de agua, así como la contaminación de ésta. Un ejemplo del uso de dichos químicos es la producción de papel a partir de fibras recicladas que ha permitido reducir el consumo de madera, sin embargo, el uso de fibras recicladas implica el uso de agua para la remoción de tintas antes de que las fibras puedan ser reutilizadas.

Caso de México

En México ha sido muy notorio el desarrollo tecnológico para la producción del papel, desde que nuestros antepasados comenzaron a fabricarlo para múltiples usos. Desde que ellos utilizaban fibras para su elaboración, hasta la llegada de la máquina de papel. Pero el desarrollo se vio frenado a causa de las normas impuestas por España, y de no ser por los esfuerzos para continuar la producción de papel en molinos clandestinos, este desarrollo se hubiese visto frenado por un periodo más largo de tiempo.

En el transcurso del tiempo, tanto en México como el mundo la escasez de los principales insumos ha sido una restricción en la producción de papel. Recuérdese como la escasez de telas que era la materia prima para la producción de papel se vio reemplazada por la madera.

Medio ambiente

La preocupación por reducir los daños al ambiente en la industria de papel se reflejó con el desarrollo de captura de gases, oxidación de químicos contaminantes y los primeros sistemas de recirculación. La implementación de sistemas de recirculación ha permitido ahorros notables de agua y materiales. En el caso de México existe un gran contraste entre el consumo de agua registrado en 1973 hasta un menor consumo logrado para el 2002.

Gracias al desarrollo tecnológico que existe actualmente, la maquinaria utilizada en la producción de papel ha sufrido grandes modificaciones. Un ejemplo importante es el surgimiento de las mejores tecnologías disponibles (BAT por sus siglas en inglés), donde la principal preocupación ha sido desarrollar sistemas que permitan la recuperación de agua y químicos utilizados durante la producción y blanqueado de la pasta. En esta línea de innovaciones, se busca implementar un nuevo concepto denominada “consumo cero de agua”, que consiste en sustituir al agua con nuevos solventes o equipos que no la utilicen para disolver la corteza de la madera para diluir la pasta. Sin embargo, estos proyectos se encuentran en etapa piloto y no se ha logrado prescindir del uso del agua para la producción de papel.

Planteamiento del modelo

Las ecuaciones que permiten modelar el proceso de producción deben registrar un impacto positivo y creciente sobre la variable endógena (producción, z), ante cambios en las variables independientes (factores de la producción, x_1, x_2, x_3, x_4). Esta propiedad de las ecuaciones se le denomina propiedad monotónica y sólo ciertas ecuaciones cumplen esta propiedad.

La propiedad monotónica está presente en las funciones lineales y en la función no lineal denominada tipo Cobb Douglas, lo que permite modelar situaciones en la que la variable dependiente z (que puede ser la producción) se incrementa en k , cuando las variables independientes se incrementan en k , lo cual es razonable para una situación real de un proceso productivo. Esta propiedad permite un crecimiento lineal de la variable z ante cambios similares en las variables independientes. Este comportamiento de las funciones mencionadas resulta conveniente para simular el proceso tecnológico del proceso de producción de una industria.

El modelo lineal enfrenta algunas limitaciones, por ejemplo, el rendimiento marginal constante de z con respecto a cada una de las variables no es observado en la mayoría de los procesos productivos, ya que lo que lo más frecuente es ver un desgaste en el crecimiento de la producción ante aumentos iguales en una de las variables independientes, por lo que se busca encontrar rendimientos decrecientes. Además, en la ecuación lineal el incremento constante de z no se encuentra afectado por el valor que registra el valor fijo de las otras variables independientes. Esta propiedad de la función ha llevado a argumentar que no sea recomendable para modelar la producción.

Para el caso lineal, la elasticidad entre z y cada variable independiente (x_1 y x_2), toma valores distintos en cada punto y se ubican entre cero y uno lo que impide realizar comparaciones entre situaciones diferentes y no es recomendable para simular la producción.

La **relación técnica de sustitución** (RTS) entre x_1 y x_2 en el caso lineal es constante, lo cual no es una situación realista, ya que lo más probable es que en los procesos de producción existan límites en dicha capacidad sustitución entre insumos de la producción. Esto explica que al calcular la elasticidad de la **RTS** reporte un valor igual a infinito, mostrando la altísima capacidad de sustitución entre variables en esta función. Como consecuencia de esta infinita sustitución en el caso lineal se puede considerar que al menos uno de los factores de la producción sea cero. Esta propiedad no aboga para modelar una situación real.

La función no lineal tipo **Cobb Douglas** representa un caso más realista al trabajar sobre el espacio de soluciones en que se suponga que todas y cada una de las variables independientes debe ser mayor o igual a cero para que la variable independiente sea positiva. Es decir, se considera que al menos una unidad de cada uno de los factores de la producción. El espacio de soluciones en un espacio tridimensional adopta una forma cóncava y simula muy bien el proceso productivo.

La función **Cobb Douglas** registra un producto marginal variable y decreciente, definido por cada una de las derivadas parciales evaluadas en cada punto, lo que hace posible analizar el comportamiento del proceso de producción en diferentes puntos. Los incrementos en la variable dependiente (z) decrecen a medida que se incrementa la variable independiente, lo cual muestra un comportamiento de productividad decreciente de la variable que se incrementa, lo que resulta más realista en los procesos productivos.

En la función **Cobb Douglas**, la elasticidad entre la variable dependiente z y una variable independiente es constante en cualquier punto de la función, lo que permite comparar su comportamiento con otros procesos y resulta conveniente para modelar los procesos tecnológicos. El exponente de las variables independientes denota la elasticidad de la variable respecto a z . Las α_i suman uno.

Debido a la forma convexa de las curvas de nivel (isocuantas), la **RTS** entre variables independientes es diferente en cada punto de una misma curva de nivel, lo que resulta realista en un proceso tecnológico. La elasticidad técnica de sustitución de la **RTS** es igual uno en la región de mayor curvatura de la función, lo que muestra la perfecta sustitución entre las variables independientes. Este comportamiento capta aspectos tecnológicos interesantes de los procesos productivos.

La constante **A** en la función **Cobb Douglas** sintetiza el factor de escala de la tecnología que registran los procesos productivos, ya que cuando **A>1** simula rendimientos crecientes, cuando **A=1** rendimientos constantes y **A<1** rendimientos decrecientes.

El modelo **Cobb Douglas** es una función monotónica de primer orden, lo que explica que cuando las variables independientes se incrementan en **k**, la variable independiente **z** se incrementa exactamente en **k** y se comporta exactamente igual al modelo lineal lo cual habla de la bondad de este modelo. Una ventaja importante de la función **Cobb Douglas** es que puede transformarse en una función lineal, lo que permite la estimación de la ecuación.

Modelos estimados

Los modelos estimados para la industria de papel en la Cuenca del Valle de México para el 2008 y el 2013 se basan en la función Cobb Douglas y son los siguientes:

Modelo 2008	Modelo 2013
$Q = 61.55 L^{0.20} M^{0.16} W^{0.58} K^{0.06}$	$Q = 249.63 L^{0.20} M^{0.34} W^{0.24} K^{0.19}$

En la función de producción Cobb Douglas el parámetro **A** mide cuánto producto se puede obtener si se usa una unidad de cada factor. Para el 2008 el valor de A es de \$ **61.55** de producto y para el **2013** es de \$**249.63**. En este periodo de cinco años la capacidad productiva de la industria de papel en la CVM se incrementó **3** veces, explicado por avance tecnológico incorporado en la industria. Esta industria al tener un valor de **A>1** registra rendimientos crecientes, y su crecimiento tan importante de A indica su dinamismo desde el punto de vista tecnológico.

En la función de producción Cobb Douglas el parámetro **α** representa la elasticidad de la producción con respecto a cada uno de los factores. Un exponente alto (cercano a la unidad, indica una alta sensibilidad de la producción con respecto al factor que se está analizando), por otra parte, un valor bajo de **α** de cada uno de los factores (cercano a cero) representa una baja sensibilidad de la producción con respecto al factor. Por ejemplo, para el modelo 2008 se tuvo un valor alto en la elasticidad del agua (**α_w= 0.58**, caracterizando la) y bajo para el caso del k (**α_k= 0.06**).

La escasez absoluta del recurso hídrico en la CVM ha obligado a la industria del papel, a buscar alternativas que permitan reducir su consumo productivo y poder permanecer ubicados en esta región. El análisis de elasticidades capta el comportamiento señalado -reducir el consumo de agua en la industria de papel-, las elasticidades muestran que para el año 2008 se tenía una mayor sensibilidad al uso del agua ya que era el principal insumo en la producción **α_w= 0.58** y para el 2013 el valor de su elasticidad disminuyó a **α_w= 0.24**, para dicho año, el resto de los factores tomó una mayor relevancia-. Esta reducción se ha logrado por los diferentes avances en la tecnología, por ejemplo, el uso de software permite una mayor precisión de las participaciones utilizadas de cada insumo, el desarrollo de equipo multitareas permite que se pueda realizar de manera simultánea la formación de hojas y la recuperación de materiales. La flexibilidad de la maquinaria permite el uso de diferentes materiales, por ejemplo, el uso de la pasta de celulosa preformada en el caso de "las plantas no integradas". Es decir, esto ha implicado el desarrollo tecnológico y prácticas que se consideran eficientes en el consumo del agua.

A través del parámetro **RTS** se logró captar cuales fueron los aspectos tecnológicos que permitieron lograr la reducción del uso del agua en la producción de papel del 2008 al 2013. Este indicador muestra que el capital ha sido el sustituto más importante en el uso del agua, seguido del uso de materias primas, y en último lugar lo ha sido el uso del trabajo.

La representación gráfica de la producción cuando sólo varía el factor agua permite contrastar la capacidad de producción de la industria, el modelo para el periodo 2013 mostro una mayor capacidad productiva.

Los resultados obtenidos muestran claramente la potencia del modelo no lineal para captar los rasgos más importantes de la tecnología de producción de procesos industriales, y la importancia de estudios empíricos para situaciones y regiones específicas de México.

Lista de figuras

Introducción

Figura 1.1 :Empresas productoras de papel presentes en la CVM	9
Figura 1.1: Molino de papel	14
Figura 1.2: Imagen de la imprenta	15
Figura 1.3:Pila o tina holandesa	16
Figura 1.4: Trapos utilizados para la fabricación de papel	16
Figura 1.5: Máquina de papel	17
Figura 1.6: Imagen de batán.....	22
Figura 1.7: Sayal	23
Figura 1.8: Pulper	25
Figura 1.9:Disco refinador	26
Figura 1.10. Filtro prensa de banda	26
Figura 1.11 Máquina de papel.....	26
Figura 1.12: Figura del proceso de producción de papel	27
Figura 1.13: Preparación de pulpa en Pulper	29
Figura 1.14:Disco refinador	30
Figura 1.15: Pulpa antes y después de blanquear.....	31
Figura 1.16: Máquina de papel	33
Figura 1.17: Uso del agua en la producción de papel	34
Figura 1.18: Proceso de recirculación	37
Figura 1.19: Recirculación corta.....	37

Capítulo 3

Figura 3.1: Diagrama de flujo de producción de papel	104
Figura 3.2: Descripción de la actividad manufacturera (3)	111

Lista de cuadros

Capítulo 1

Cuadro 1.1: Evolución de productos químicos utilizados en la producción de papel.....	18
Cuadro 1.2: Consumo productivo de agua en México, India y África por etapas del proceso de producción	35
Cuadro 1.3: Consumo de agua por diferentes tipos de papel	36
Cuadro 1.4 Reducción de consumo de agua por recirculación en el circuito cerrado en Metza Botnia Finlandia.....	38
Cuadro 1.5: Uso del agua en recirculación en la producción de papel en diferentes regiones del mundo	39

Capítulo 2

Cuadro 2.1: Propiedad lineal	49
Cuadro 2.2: Propiedad monotónica	50
Cuadro 2.3: Incrementos de z con respecto a x_1	52
Cuadro 2.4: Incrementos de z con respecto a x_2	52
Cuadro 2.5: Elasticidades de z con respecto a x_1	56
Cuadro 2.6: Elasticidad de z con respecto a x_1.....	57
Cuadro 2.7: TRS de x_1 y x_2.....	59
Cuadro 2.8: Comportamiento lineal	64
Cuadro 2.9:Incrementos de z con respecto a x_1	66
Cuadro 2.10: Incrementos de z con respecto a x_2	66
Cuadro 2.11: Elasticidad de z con respecto a x_1	69
Cuadro 2.12: Elasticidad de z con respecto a x_2	69
Cuadro 2.13: Cálculo de la RTS para diferentes puntos.....	71
Cuadro 2.14: Elasticidad técnica de sustitución	73
Cuadro 2.15: Propiedades lineales Cobb Douglas	77
Cuadro 2.16: Incrementos de z con respecto a x_1	80
Cuadro 2.17: Incrementos en z por cambios en x_2	80
Cuadro 2.18:Incrementos de z con respecto a x_2	83
Cuadro 2.19: Elasticidad técnica de z con respecto a x_1	85
Cuadro 2.20 :Elasticidad de z con respecto a x_2.....	86
Cuadro 2.21: Cálculo de la elasticidad técnica de sustitución	89
Cuadro 2.22: Elasticidad técnica de sustitución	92
Cuadro 2.23 :comparación de factor de escala	95
Cuadro 2.24: Incremento de z con respecto a x_1	98
Cuadro 2.25: Elasticidad técnica de sustitución	100

Capítulo 3

Cuadro 3.1: Símbolos	103
Cuadro 3.2: Resumen de datos del censo económico 2009	112
Cuadro 3.3: Resumen de base del censo económico 2014.....	112
Cuadro 3.4: Comparativo censos económicos 2009 y 2014	113
Cuadro 3.5: Modelo del 2008: función de producción.....	114
Cuadro 3.6: Modelo del 2014: función de producción.....	115
Cuadro 3.8: valores fijos de L, M y k	121
Cuadro 3.9:Ejemplos para este caso son:	125
Cuadro 3.10: Valores fijos L, M y K.....	128
Cuadro 3.11: Comparativo de dos funciones técnicas de producción de la CVM	130
Cuadro 3.12:Comparación de ecuaciones.....	131
Cuadro 3.13: Cuadro comparativo	134
Cuadro 3.14. Valores que se consideran fijos para L, M y K Caso I.....	136

Lista de gráficas

Capítulo 2

Gráfica 2.1: Plano $z = 3x_1 + 2x_2$	45
Gráfica 2.2: Plano paralelo $z=50$	45
Gráfica 2.3: Recta de intersección (recta de nivel).....	46
Gráfica 2.4: Dos curvas de nivel	47
Gráfica 2.5: Recta de nivel proyectada	47
Gráfica 2.6: Rectas de nivel proyectadas	48
Gráfica 2.7: Familia de curvas de nivel	48
Gráfica 2.8: Curvas de nivel	50
Gráfica 2.9: punto R	52
Gráfica 2.10: Elasticidades.....	55
Gráfica 2.11: Elasticidad de z con respecto a x_2	57
Gráfica 2.12: Curva de nivel $z=50$	58
Gráfica 2.13: Ecuación $z=xy$	60
Gráfica 2.14: Curva de nivel $z=4$	61
Gráfica 2.15: Curva de nivel $x_1x_2=4$	61
Gráfica 2.16: curvas de nivel	62
Gráfica 2.17: Curvas de nivel	62
Gráfica 2.18: Familia de curvas de nivel	63
Gráfica 2.19: Punto A y G en el espacio	64
Gráfica 2.20: Variable $x_2=2$	66
Gráfica 2.21: Variable $x_1=3$	67

Gráfica 2.22: Curva de nivel $z=10$	71
Gráfica 2.23: Curva de nivel $z=10$	72
Gráfica 2.24: de Modelo Cobb Douglas	74
Gráfica 2.25 Intersección de plano $z=10$ y superficie Cobb Douglas	75
Gráfica 2.26: Curva de nivel $z=10$	75
Gráfica 2.27: Curvas de nivel en el plano de tres dimensiones	76
Gráfica 2.28: Familia de curvas de nivel	76
Gráfica 2.29: Expansión de curva de nivel	78
Gráfica 2.30: Producto marginal decreciente	79
Gráfica 2.31: Influencia de la variable fija x_1	82
Gráfica 2.32: Curva de nivel $z=10$	89
Gráfica 2.33: Elasticidad técnica de sustitución.....	91
Gráfica 2.34 Comparativo de curvas con y sin factor de escala.....	93
Gráfica 2.35: Curva con factor de escala.....	94
Gráfica 2.36: Curva de nivel sin factor de escala	94
Gráfica 2.37 Intersección de planos Gráfica 2.38 Proyección de curvas de nivel.....	96
Gráfica 2.39: Isocuanta $z=10$	99
Gráfica 3.1: Producto marginal constante	106
Gráfica 3.2: Rendimiento constantes	107
Gráfica 3.3: Rectas de nivel	107
Gráfica 3.4: Factor de escala	108
Gráfica 3.5: Incremento marginal decreciente	109
Gráfica 3.6: Incremento de Q cuando W aumenta	109
Gráfica 3.7: Isocuanta de W y M	119
Gráfica 3.8: Valor marginal decreciente.....	120
Gráfica 3.9: Caso I.....	121
Gráfica 3.10: Caso II.....	122
Gráfica 3.11: Comparación de casos 2008	122
Gráfica 3.12 RTS entre W y K.....	126
Gráfica 3.13 σ_s Para los factores W y M	127
Gráfica 3.14: Producción de papel caso I	128
Gráfica 3.15: Producción y agua	129
Gráfica 3.16: Comparativo de producción del año 2013	130
Gráfica 3.17 Posibilidades de producción de los Modelos 2013 - 2008.....	131

Anexo base de datos 2008

Entidad	Municipio	Q (\$)	L	M(\$)	W(m³)	K (\$)
09 Ciudad de México	002 Azcapotzalco	2,800,352,000	2,680	1,736,166,000	88,526	493,900,000
09 Ciudad de México	003 Coyoacán	82,243,000	230	36,764,000	1,316	52,248,000
09 Ciudad de México	005 Gustavo A. Madero	474,770,000	1,392	259,116,000	27,105	115,049,000
09 Ciudad de México	006 Iztacalco	618,234,000	645	441,310,000	20,211	323,534,000
09 Ciudad de México	010 Álvaro Obregón	34,544,000	270	19,407,000	684	12,594,000
09 Ciudad de México	011 Tláhuac	212,183,000	256	87,588,000	442,474	55,314,000
09 Ciudad de México	012 Tlalpan	11,429,000	16	5,746,000	474	2,255,000
09 Ciudad de México	014 Benito Juárez	12,796,000	66	6,885,000	316	1,983,000
09 Ciudad de México	017 Venustiano Carranza	50,474,000	279	23,146,000	3,105	30,458,000
15 México	013 Atizapán de Zaragoza	283,275,000	264	130,143,000	131,789	131,678,000
15 México	024 Cuautitlán	3,036,121,000	1,132	1,107,261,000	316	834,901,000
15 México	025 Chalco	18,514,000	20	9,825,000	2,632	420,000
15 México	030 Chiconcuac	418,000	5	236,000	53	74,000
15 México	039 Ixtapaluca	840,219,000	749	361,324,000	126,895	74,013,000
15 México	057 Naucalpan de Juárez	1,919,419,000	1,804	842,645,000	51,895	694,399,000
15 México	058 Nezahualcóyotl	62,870,000	358	31,024,000	22,579	11,968,000
15 México	060 Nicolás Romero	666,989,000	355	507,124,000	40,579	70,121,000
15 México	104 Tlalnepantla de Baz	5,831,966,000	4,385	3,164,586,000	1,166,053	3,666,224,000
15 México	106 Toluca	1,769,911,000	1,679	774,925,000	46,947	570,639,000
15 México	108 Tultepec	6,036,000	19	2,120,000	105	522,000
15 México	109 Tultitlán	551,941,000	854	338,789,000	67,737	222,545,000
15 México	121 Cuautitlán Izcalli	1,792,269,000	1,852	1,203,943,000	114,737	365,657,000
15 México	122 Valle de Chalco Solidaridad	34,584,000	22	18,089,000	53	5,119,000

16 México	007 Iztapalapa	447,268,000	463	169,829,000	331,526	31,659,000
17 México	015 Cuauhtémoc	73,347,000	154	44,008,000	3,526	7,697,000
09 Ciudad de México	otros	17,821,000	530	175,074,000	332,632	49,117,000
19 México	033 Ecatepec de Morelos	6,690,464,000	2,483	2,407,473,000	2,804,000	628,138,000
20 México	070 La Paz	873,759,000	1,221	554,970,000	46,421	877,115,000
21 México	104 Tlalnepantla de Baz	485,478,000	293	228,416,000	384,789	805,154,000
22 México	otros	12,595,329,000	6,660	5,278,583,000	3,860,421	4,884,487,000
Hidalgo	048 Pachuca de Soto	316,000	10	98,000	53	145,000
Hidalgo	069 Tizayuca	744,795,000	316	273,557,400	138,063	23,838,000

Anexo base de datos 2013

Entidad	Municipio	Q \$	L trabajadores	M \$	W Metros cúbicos	K \$
09 Ciudad de México	002 Azcapotzalco	2,129,441,000	2,372	1,297,601,000	170,789	614,220,000
09 Ciudad de México	003 Coyoacán	72,049,000	247	25,810,000	18,474	88,607,000
09 Ciudad de México	005 Gustavo A. Madero	600,554,000	1,041	356,863,000	433,368	125,048,000
09 Ciudad de México	006 Iztacalco	569,528,000	528	368,382,000	18,105	566,429,000
09 Ciudad de México	007 Iztapalapa	3,658,286,000	4,149	1,994,400,000	746,842	1,193,623,000
09 Ciudad de México	010 Álvaro Obregón	12,130,000	47	4,325,000	368	5,160,000
09 Ciudad de México	011 Tláhuac	235,417,000	200	86,680,000	38,316	37,362,000
09 Ciudad de México	012 Tlalpan	69,889,000	101	49,399,000	2,684	23,053,000
09 Ciudad de México	013 Xochimilco	6,426,000	52	1,795,000	1,842	14,505,000
09 Ciudad de México	014 Benito Juárez	29,259,000	44	18,491,000	1,053	4,197,000
09 Ciudad de México	015 Cuauhtémoc	402,717,000	1,026	175,471,000	51,105	120,505,000
09 Ciudad de México	016 Miguel Hidalgo	50,258,000	971	18,036,000	5,105	26,684,000

09 Ciudad de México	017 Venustiano Carranza	73,831,000	311	21,675,000	15,053	30,869,000
13 Hidalgo	048 Pachuca de Soto	2,077,000	15	751,000	158	1,108,000
13 Hidalgo	069 Tizayuca	95,539,000	69	36,835,000	1,842	40,875,000
13 Hidalgo	075 Tolcayuca	104,303,000	109	74,991,000	9,158	7,839,000
15 México	013 Atizapán de Zaragoza	342,571,000	399	204,959,000	260,789	199,465,000
15 México	020 Coacalco de Berriozábal	14,667,000	30	10,569,000	579	1,116,000
15 México	024 Cuautitlán	114,905,000	82	194,000	30,368	7,706,000
15 México	031 Chimalhuacán	795,000	16	162,000	105	732,000
15 México	033 Ecatepec de Morelos	10,064,465,000	4,084	5,606,025,000	2,313,421	4,842,788,000
15 México	037 Huixquilucan	311,125,000	132	115,134,000	58,316	357,118,000
15 México	039 Ixtapaluca	1,447,896,000	1,118	687,466,000	110,737	204,270,000
15 México	057 Naucalpan de Juárez	2,462,987,000	2,064	1,353,497,000	1,641,000	1,248,262,000
15 México	058 Nezahualcóyotl	58,245,000	199	31,250,000	421	36,062,000
15 México	060 Nicolás Romero	573,520,000	385	381,126,000	47,211	58,807,000
15 México	070 La Paz	2,140,586,000	1,385	1,234,024,000	91,789	643,444,000
15 México	104 Tlalnepantla de Baz	4,855,934,000	4,266	2,514,512,000	1,704,632	2,956,415,000
15 México	106 Toluca	3,153,655,000	2,297	1,681,419,000	307,579	3,408,810,000
15 México	108 Tultepec	2,235,000	20	1,220,000	211	528,000
15 México	109 Tultitlán	516,682,000	721	282,362,000	22,947	115,989,000
15 México	121 Cuautitlán Izcalli	8,021,527,000	2,827	3,411,740,000	269,526	925,047,000
15 México	122 Valle de Chalco Solidaridad	2,003,000	20	773,000	2,895	1,521,000
09 ciudad de México	otros	7,909,816,000	11,234	4,418,936,000	1,503,105	2,869,524,000

Referencias citadas

- Abderrahman, W. A. (2001). Energy and water in arid developing countries: Saudi Arabia, a case-study. *International Journal of Water Resources Development*, 17(2).
- Area, M. C. (2005). Tecnologías limpias para la producción de pulpa y papel de Eucalyptus. *Jornadas Forestales entre rio*.
- Bajpal, P. (2010). *Enviromental Friendly Production of Pulp and paper*. Willey.
- C. Gibbons, D. (1987). *The economy of water*. N. York: Routledge
- Comición Nacional del Agua . (2013). Estadísticas del Agua de la Región Hidrológico-Administrativa XIII.
- Cerutti, J. (2013). *Análisis de diagnostico tecnológico sectorial. Celulosa y Papel*
- Curnham, C. F. (1965). *Industrial Wastewater Control*. Nueva York: Academic Press.
- Crowther, G. &. (2010). *Towards the Circular Economy: Accelerating the Scale-up Across Global Supply Chains*. Ginebra: In World Economic Forum,(Geneva, Switzerland).
- Dirección general de usos del agua. (1976). Celulosa y Papel. *Repositorio Digital*. México: Instituto Nacional de Ecología y Cambio Climatico
- Días Trenado, Juana Angelica. (2005). *Tesis: Disponibilidad de agua superficial en la Cuenca del Valle de México*. Ciudad de México: UNAM.
- Dr. Estrada,. S. (2010). La biotecnología en México: situación de la biotecnología en el mundo y la situación de la biotecnología en México y su factibilidad de desarrollo.
- European Emission, Integrated Pollution prevention and control. (2001). Reference Document on best aviable techniques in the pulp and paper industry .
- Estructura jerargica. (2016). Obtenido de <http://www3.inegi.org.mx/sistemas/SCIAN/scian.aspx>
- Fuentes Gómez, E. (Septiembre - Diciembre de 2013). Valoración de las componentes del Balance hídrico usando información estadística y geográfica: la cuenca del Valle de México. *Revista Internacional de Estadística y Geografía*, 3(4).
- George B. et al (2006). Cálculo de varias variables. Pearson Education
- Gómez Hernández, S. G. (2010). Propuesta de la Estructura Organizacional, Manuales Organizacional y de Procedimientos de la gerencia de abastecimiento de fibras en una empresa recicladora de papel. México : Instituto Politecnio Nacional.

- Hanemann, W. (1998). Determinants of urban water use. Urban Water demand management and planning,.
- Hoy, M. (2001). *Matemathics for economics*. Cambridge, Mass.
- Inegi . (2018). *Censo Económico* .
- Inegi . (2013). *Censo Económico* .
- Inegi. (2018). *Aspectos Normativos y metodológicos. Sistema de Clasificación Industrial de América del Norte 2013 (SCIAN 2013)* . Obtenido de <http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/scian/presentacion.aspx>
- Estructura jerargica. (s.f.). Obtenido de <http://www3.inegi.org.mx/sistemas/SCIAN/scian.aspx>
- Inegi. (2016). *Directorio Estadístico Nacional de Unidades Económicas*.
- Inegi. (2016). *INEGI*. Obtenido de <http://www3.inegi.org.mx/sistemas/SCIAN/scian.aspx>
- J. Kirwan , M. (2005). Paper and Paperborad Packaging Tecnology. London, UK: Blackwell Publishing.
- Lawrenc, E. O. (2009). Energy Efficiency Improvement and Cost Saving Opportunities for the pulp and paper Industry.
- López Sardi, E. M. (2007). Fabricación de Pasta de Celulosa, aspectos técnicos y contaminación ambiental. Ciencia y Tecnología, (6).
- Macdonal , C. (2004). Water usage inthe south african pulp and paper industries. Durban, KwaZulu-Natal: University of KwaZulu-Natal.
- México, O. d. (2013). Estadísticas del Agua de la Región Hidrológico Administrativa XII. México .
- Ministerio de Ciencia . (s.f.). *Análisis de diagnostico Tecnológico sectorial* . Argentina.
- Moeller Chávez, G. (s.f.). Evaluación de alternativas para el reuso del agua en tres giros industriales
- National Service Center for Environmental Publications (NSCEP). (1976). Water Reuse in a paper reproceessing plant. Obtenido de <https://nepis.epa.gov/Exe/ZyNET.exe/9101BG57.txt?ZyActionD=ZyDocument&Client=EPA&Index=1976%20Thru%201980&Docs=&Query=&Time=&EndTime=&SearchMethod=1&TocRestrict=n&Toc=&TocEntry=&QField=&QFieldYear=&QFieldMonth=&QFieldDay=&UseQField=&IntQFieldOp=0&ExtQFiel>
- Organismo de Cuenca Aguas del Valle de México. (2013). Estadísticas del Agua de la Región
- Protection Enviromental Agency , United States. (1976). *Water reuse in a paper procesing plant*.
- Pulido ,B.A. (1999). Sobreexplotación de acuíferos y desarrollo sostenible. Departamento de Hidrogeología, Universidad de Almería, 1, 16-52.

- Rendezetti, S. (1992). Estimating the structure of Industrial Waster Demand. The case of Canadian Manufacturing. *Land Economics*, 68(4), 396- 484.
- Revilla, E. (2004). Formación de papel. La máquina de papel. II Curso Internacional en Tecnología de productos Forestales, Módulo de celulosa. Madrid
- Revollo Fernández, D. A. (2017). Valor económico del agua en la Industria Manufacturera ubicada en la Cuenca del Valle de México. Seminario 2: Economía del Agua y desarrollo sustentable. México.
- Rodríguez Tapía, L., & Armando, M. N. (s.f.). Integración de un sistema de cuentas económica e hídricas en la Cuenca del Valle de México. *Revista Internacional de Estadística y Geografía*
- Svensk Cellulosa Aktreblaget . (s.f.). Fabricación de papel .
- Tewaril, P. K., Batra, V. S., & Balakrishnan, M. (2009). *Efficient water use in industries: Cases from the Indian agro-based pulp and paper mills. Journal of Environmental Management.*
- Varian, H. (1999). *Microeconomics analysis*. Norton
- Vargas Ovando , L. J. (2015). Valor económico del agua en la Industria manufacturera chilena: Enfoque de productividad marginal. Chile: Universidad de Concepción.
- Wana , H., & Lall, S. (s.f.). Valuing water for Chine Industry. A marginal productivity Assessment . Development Research Group .
- World Bank Group. (2010). Enviromental , Healt, and Safety guidelines pulp and papers mill.
- Zhou, Y., & Tolbar, S. (s.f.). Water Use in China´s Domestic, Industrial and Agricultural Sectors: An Empirical Analisis. *Working papers FNU-65 , Research unit sustainability and Global Change.*

Referencias complementarias

- Ambientales, Catalogo de Aragón de buenas prácticas. (s.f.). *Reducción del consumo de agua en la producción de papel a partir de papel recuperado.*
- Area, M. C. (s.f.). *Gestión ambiental en la fabricación de papel reciclado .*
- Asociación Española de Fabricantes de Pasta, Papel y Cartón (ASPAPEL). (2017). *Revolución industrial papelera: el proyecto two team.*
- Camara de papel . (s.f.). *Historia de producción de papel.*

- Condorchem Envitech. (s.f.). */Tratamiento de aguas residuales, efluentes y aire al servicio del Medio Ambiente*. Obtenido de <http://blog.condorchem.com/tratamiento-de-aguas-residuales-en-la-industria-papelera/>
- FAO. (2102). *Capacidades de pasta y papel: estudio 2011-2016*. Roma.
- formatos, I. d. (s.f.). *Tamaños de papel*. Recuperado el 11 de abril de 2017, de <http://www.tamanosdepapel.com/pesos-de-papel.htm>
- Garcidueñas, P. (s.f.). *expoknew. com*. Obtenido de <https://www.expoknews.com/cual-es-la-papelera-que-menos-agua-utiliza-en-mexico/>
- German Federal Environment Agency. (s.f.). *Water circuits and water balances*.
- Greenpeace. (2006). *El futuro de la Producción de celulosa y las técnicas de producción más favorables para el medio ambiente*.
- Lang, C. (2004). Los impactos de la producción de celulosa. *Movimiento Mundial por los árboles tropicales*.
- S, B. G. (s.f.). *SPB Approach on water conservation in paper machine -a case study*.
- Sancho, P. A. (s.f.). *Econometrías de económicas . Caso 2 Función de producción Cobb- Douglas*.
- Santa - Cruz, A. (2019). *Introducción a las funciones de varias variables. Curso (209/2010)*.
- Schabel, D. S. (s.f.). Effluent free papermaking: Industrial experiences and latest developments in the German paper industry.
- Taha, H. A. (2012). *Investigación de operaciones*. México: Pearson Education.
- (2004). *Series on Emission Scenario Documents Water Treatment Chemicals*. OECD Environmental Health and Safety Publications.
- s.f.). Obtenido de http://www.circularesescolares.com/index.php?option=com_content&view=article&id=23&Itemid=106
- Máquina de papel*. (s.f.). Obtenido de <http://xrd-equipment.com/2-pulping-paper-making-machinery>
- El molino de papel del Real Sitio de San Fernando*. (Agosto de 2017). Obtenido de <https://sanfernandodehenaresnews.blogspot.com/2017/08/el-molino-de-papel-del-real-sitio-de.html>